Grunk Föreläsning 1

Grundläggande algebra

Jonathan Nilsson

Linköpings Universitet

Idag

- Implikation och ekvivalens
- Uttryck och ekvationer
- Kvadratkomplettering och kvadratrötter
- Linjer och cirklar
- Polynom

Del I

Implikation och ekvivalens

Implikation

"Solen är uppe" $\Rightarrow$ "Det är ljust ute"

Implikation

$$\text{"Solen är uppe"} \Rightarrow \text{"Det är ljust ute"}$$

Definition

Vi säger att P **implicerar** Q och skriver $P \Rightarrow Q$ när påståendet P *medför* påståendet Q, med andra ord, om P är sant så är Q också sant.

Implikation

$$\text{"Solen är uppe"} \Rightarrow \text{"Det är ljust ute"}$$

Definition

Vi säger att P **implicerar** Q och skriver $P \Rightarrow Q$ när påståendet P *medför* påståendet Q, med andra ord, om P är sant så är Q också sant.

Ska frågetecknet ersättas med $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?

$$\text{"Det finns moln" ? "Det regnar"}$$

Implikation

$$\text{"Solen är uppe"} \Rightarrow \text{"Det är ljust ute"}$$

Definition

Vi säger att P **implicerar** Q och skriver $P \Rightarrow Q$ när påståendet P *medför* påståendet Q, med andra ord, om P är sant så är Q också sant.

Ska frågetecknet ersättas med $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?

$$\text{"Det finns moln"} \Leftarrow \text{"Det regnar"}$$

Implikation

$$\text{"Solen är uppe"} \Rightarrow \text{"Det är ljust ute"}$$

Definition

Vi säger att P **implicerar** Q och skriver $P \Rightarrow Q$ när påståendet P *medför* påståendet Q, med andra ord, om P är sant så är Q också sant.

Ska frågetecknet ersättas med $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?

$$\text{"Det finns moln"} \Leftarrow \text{"Det regnar"}$$
$$\text{"X är en rektangel" ? "X är en kvadrat"}$$

Implikation

$$\text{"Solen är uppe"} \Rightarrow \text{"Det är ljust ute"}$$

Definition

Vi säger att P **implicerar** Q och skriver $P \Rightarrow Q$ när påståendet P *medför* påståendet Q, med andra ord, om P är sant så är Q också sant.

Ska frågetecknet ersättas med $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?

$$\text{"Det finns moln"} \Leftarrow \text{"Det regnar"}$$
$$\text{"X är en rektangel"} \Leftarrow \text{"X är en kvadrat"}$$

Implikation

$$\text{"Solen är uppe"} \Rightarrow \text{"Det är ljust ute"}$$

Definition

Vi säger att P **implicerar** Q och skriver $P \Rightarrow Q$ när påståendet P *medför* påståendet Q, med andra ord, om P är sant så är Q också sant.

Ska frågetecknet ersättas med $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?

$$\text{"Det finns moln"} \Leftarrow \text{"Det regnar"}$$
$$\text{"X är en rektangel"} \Leftarrow \text{"X är en kvadrat"}$$
$$x > 3 \ ? \ x > 1$$

Implikation

$$\text{"Solen är uppe"} \Rightarrow \text{"Det är ljust ute"}$$

Definition

Vi säger att P **implicerar** Q och skriver $P \Rightarrow Q$ när påståendet P *medför* påståendet Q, med andra ord, om P är sant så är Q också sant.

Ska frågetecknet ersättas med $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?

$$\text{"Det finns moln"} \Leftarrow \text{"Det regnar"}$$
$$\text{"X är en rektangel"} \Leftarrow \text{"X är en kvadrat"}$$
$$x > 3 \Rightarrow x > 1$$

Implikation

$$\text{"Solen är uppe"} \Rightarrow \text{"Det är ljust ute"}$$

Definition

Vi säger att P **implicerar** Q och skriver $P \Rightarrow Q$ när påståendet P *medför* påståendet Q, med andra ord, om P är sant så är Q också sant.

Ska frågetecknet ersättas med $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?

$$\text{"Det finns moln"} \Leftarrow \text{"Det regnar"}$$
$$\text{"X är en rektangel"} \Leftarrow \text{"X är en kvadrat"}$$
$$x > 3 \Rightarrow x > 1$$
$$x = 5 \ ? \ x < 7$$

Implikation

$$\text{"Solen är uppe"} \Rightarrow \text{"Det är ljust ute"}$$

Definition

Vi säger att P **implicerar** Q och skriver $P \Rightarrow Q$ när påståendet P *medför* påståendet Q, med andra ord, om P är sant så är Q också sant.

Ska frågetecknet ersättas med $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?

$$\text{"Det finns moln"} \Leftarrow \text{"Det regnar"}$$
$$\text{"X är en rektangel"} \Leftarrow \text{"X är en kvadrat"}$$
$$x > 3 \Rightarrow x > 1$$
$$x = 5 \Rightarrow x < 7$$

Implikation

$$\text{"Solen är uppe"} \Rightarrow \text{"Det är ljust ute"}$$

Definition

Vi säger att P **implicerar** Q och skriver $P \Rightarrow Q$ när påståendet P *medför* påståendet Q, med andra ord, om P är sant så är Q också sant.

Ska frågetecknet ersättas med $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?

$$\text{"Det finns moln"} \Leftarrow \text{"Det regnar"}$$
$$\text{"X är en rektangel"} \Leftarrow \text{"X är en kvadrat"}$$
$$x > 3 \Rightarrow x > 1$$
$$x = 5 \Rightarrow x < 7$$
$$x^2 = 9 \ ? \ x = 3$$

Implikation

$$\text{"Solen är uppe"} \Rightarrow \text{"Det är ljust ute"}$$

Definition

Vi säger att P **implicerar** Q och skriver $P \Rightarrow Q$ när påståendet P *medför* påståendet Q, med andra ord, om P är sant så är Q också sant.

Ska frågetecknet ersättas med $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?

$$\text{"Det finns moln"} \Leftarrow \text{"Det regnar"}$$
$$\text{"X är en rektangel"} \Leftarrow \text{"X är en kvadrat"}$$
$$x > 3 \Rightarrow x > 1$$
$$x = 5 \Rightarrow x < 7$$
$$x^2 = 9 \Leftarrow x = 3$$

Implikation

$$\text{"Solen är uppe"} \Rightarrow \text{"Det är ljust ute"}$$

Definition

Vi säger att P **implicerar** Q och skriver $P \Rightarrow Q$ när påståendet P *medför* påståendet Q, med andra ord, om P är sant så är Q också sant.

Ska frågetecknet ersättas med $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?

$$\text{"Det finns moln"} \Leftarrow \text{"Det regnar"}$$
$$\text{"X är en rektangel"} \Leftarrow \text{"X är en kvadrat"}$$
$$x > 3 \Rightarrow x > 1$$
$$x = 5 \Rightarrow x < 7$$
$$x^2 = 9 \Leftarrow x = 3$$
$$x > 0 \ ? \ x < 1$$

Implikation

$$\text{"Solen är uppe"} \Rightarrow \text{"Det är ljust ute"}$$

Definition

Vi säger att P **implicerar** Q och skriver $P \Rightarrow Q$ när påståendet P *medför* påståendet Q, med andra ord, om P är sant så är Q också sant.

Ska frågetecknet ersättas med $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?

$$\text{"Det finns moln"} \Leftarrow \text{"Det regnar"}$$
$$\text{"X är en rektangel"} \Leftarrow \text{"X är en kvadrat"}$$
$$x > 3 \Rightarrow x > 1$$
$$x = 5 \Rightarrow x < 7$$
$$x^2 = 9 \Leftarrow x = 3$$
$$x > 0 \not\Leftarrow\not\Rightarrow x < 1$$

Implikation

$$\text{"Solen är uppe"} \Rightarrow \text{"Det är ljust ute"}$$

Definition

Vi säger att P **implicerar** Q och skriver $P \Rightarrow Q$ när påståendet P *medför* påståendet Q, med andra ord, om P är sant så är Q också sant.

Ska frågetecknet ersättas med $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?

$$\text{"Det finns moln"} \Leftarrow \text{"Det regnar"}$$
$$\text{"X är en rektangel"} \Leftarrow \text{"X är en kvadrat"}$$
$$x > 3 \Rightarrow x > 1$$
$$x = 5 \Rightarrow x < 7$$
$$x^2 = 9 \Leftarrow x = 3$$
$$x > 0 \not\Leftarrow\not\Rightarrow x < 1$$
$$x^2 < 1 \ ? \ -1 < x < 1$$

Implikation

$$\text{"Solen är uppe"} \Rightarrow \text{"Det är ljust ute"}$$

Definition

Vi säger att P **implicerar** Q och skriver $P \Rightarrow Q$ när påståendet P *medför* påståendet Q, med andra ord, om P är sant så är Q också sant.

Ska frågetecknet ersättas med $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?

$$\text{"Det finns moln"} \Leftarrow \text{"Det regnar"}$$
$$\text{"X är en rektangel"} \Leftarrow \text{"X är en kvadrat"}$$
$$x > 3 \Rightarrow x > 1$$
$$x = 5 \Rightarrow x < 7$$
$$x^2 = 9 \Leftarrow x = 3$$
$$x > 0 \not\Leftarrow\not\Rightarrow x < 1$$
$$x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Ekvivalens

"Klocken är 20.00" $\Leftrightarrow$ "Det är 4 timmar till midnatt"

Ekvivalens

"Klockan är 20.00" $\Leftrightarrow$ "Det är 4 timmar till midnatt"

Definition

Om $P \Rightarrow Q \quad och \quad P \Leftarrow Q$ så säger vi att påståendena är *ekvivalenta* och vi skriver $P \Leftrightarrow Q$.
Ekvivalenta påståenden betyder exakt samma sak.

Ekvivalens

"Klockan är 20.00" $\Leftrightarrow$ "Det är 4 timmar till midnatt"

Definition

Om $P \Rightarrow Q$ *och* $P \Leftarrow Q$ så säger vi att påståendena är *ekvivalenta* och vi skriver $P \Leftrightarrow Q$.
Ekvivalenta påståenden betyder exakt samma sak.

$$3x + 1 = 7 + x \;\Leftrightarrow\; 2x + 1 = 7 \;\Leftrightarrow\; 2x = 6 \;\Leftrightarrow\; x = 3.$$

Ekvivalens

"Klockan är 20.00" $\Leftrightarrow$ "Det är 4 timmar till midnatt"

Definition

Om $P \Rightarrow Q$ *och* $P \Leftarrow Q$ så säger vi att påståendena är *ekvivalenta* och vi skriver $P \Leftrightarrow Q$.
Ekvivalenta påståenden betyder exakt samma sak.

$$3x + 1 = 7 + x \;\Leftrightarrow\; 2x + 1 = 7 \;\Leftrightarrow\; 2x = 6 \;\Leftrightarrow\; x = 3.$$

$$x^3 = x \;\Leftrightarrow\; x^3 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2 - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x+1)(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ eller } x = 1 \text{ eller } x = -1.$$

Ekvivalens

"Klockan är 20.00" $\Leftrightarrow$ "Det är 4 timmar till midnatt"

Definition

Om $P \Rightarrow Q$ *och* $P \Leftarrow Q$ så säger vi att påståendena är *ekvivalenta* och vi skriver $P \Leftrightarrow Q$.
Ekvivalenta påstånden betyder exakt samma sak.

$$3x + 1 = 7 + x \;\Leftrightarrow\; 2x + 1 = 7 \;\Leftrightarrow\; 2x = 6 \;\Leftrightarrow\; x = 3.$$

$$x^3 = x \;\Leftrightarrow\; x^3 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2 - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x+1)(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ eller } x = 1 \text{ eller } x = -1.$$

Obs!

Tecknen $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ kan endast stå mellan *påståenden*, aldrig mellan tal eller uttryck!
Man kan **inte** skriva $2 + 5 \Leftrightarrow 7$ eller $\frac{x}{3} + 2 \Leftrightarrow \frac{x+6}{3}$.

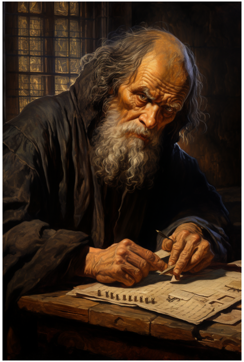
Del II

Uttryck och ekvationer

Uttryck och ekvationer

Uppgift

Förenkla $\frac{x-2}{1+\frac{1}{x-4}} - x$, och avgör för vilka x som uttrycket är definierat.



Uttryck och ekvationer

Uppgift

Förenkla $\frac{x-2}{1+\frac{1}{x-4}} - x$, och avgör för vilka x som uttrycket är definierat.

För att uttrycket ska vara definierat får ingen nämnare vara 0, så dels måste vi ha $x \neq 4$, och dels $1 + \frac{1}{x-4} \neq 0$, vilket ger $x \neq 3$. Uttrycket är alltså definierat för alla x utom för $x = 4$ och för $x = 3$.

Uppgift

Förenkla $\frac{x-2}{1+\frac{1}{x-4}} - x$, och avgör för vilka x som uttrycket är definierat.

För att uttrycket ska vara definierat får ingen nämnare vara 0, så dels måste vi ha $x \neq 4$, och dels $1 + \frac{1}{x-4} \neq 0$, vilket ger $x \neq 3$. Uttrycket är alltså definierat för alla x utom för $x = 4$ och för $x = 3$.

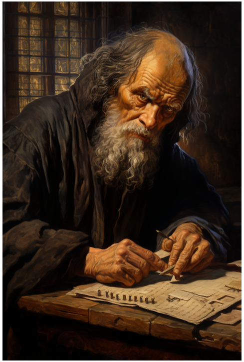
$$\frac{x-2}{1+\frac{1}{x-4}} - x = \frac{x-2}{\frac{(x-4)+1}{x-4}} - x = \frac{x-2}{\frac{x-3}{x-4}} - x = \frac{(x-2)(x-4)}{x-3} - x$$

$$= \frac{x^2-6x+8}{x-3} - \frac{x^2-3x}{x-3} = \frac{x^2-6x+8-x^2+3x}{x-3} = \frac{-3x+8}{x-3}$$

Uttryck och ekvationer

Uppgift

Låt $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$. Lös ekvationen $g(x) = 0$.



Uttryck och ekvationer

Uppgift

Låt $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$. Lös ekvationen $g(x) = 0$.

Vi har $g(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$ *förutsatt* att $x \neq 3$ (för $\frac{0}{0}$ är odefinierat). Så ekvationen har endast lösningen $x = -3$.

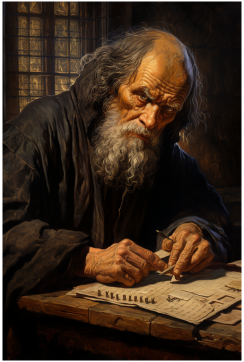
Del III

Kvadratkomplettering och kvadratrötter

Kvadratkomplettering

Uppgift

Lös ekvationen $x^2 - 4x - 5 = 0$ genom att kvadratkomplettera vänsterledet.



Kvadratkomplettering

Uppgift

Lös ekvationen $x^2 - 4x - 5 = 0$ genom att kvadratkomplettera vänsterledet.

$x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 4 - 5 = (x-2)^2 - 9 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 3 \Leftrightarrow x = 2 \pm 3 \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = 5$.

Kvadratkomplettering

Uppgift

Lös ekvationen $x^2 - 4x - 5 = 0$ genom att kvadratkomplettera vänsterledet.

$x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 4 - 5 = (x-2)^2 - 9 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 3 \Leftrightarrow x = 2 \pm 3 \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = 5$.

Alternativt: $x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 9 = (x-2)^2 - 3^2 = ((x-2)+3)((x-2)-3) =$
$(x+1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = 5$.

Kvadratkomplettering

Uppgift

Lös ekvationen $x^2 - 4x - 5 = 0$ genom att kvadratkomplettera vänsterledet.

$x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 4 - 5 = (x-2)^2 - 9 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 3 \Leftrightarrow x = 2 \pm 3 \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = 5$.

Alternativt: $x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 9 = (x-2)^2 - 3^2 = ((x-2)+3)((x-2)-3) =$
$(x+1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = 5$.

Följdfråga

Vilket är det minsta värdet som $x^2 - 4x - 5$ kan anta? För vilket x fås det minsta värdet?

Kvadratkomplettering

Uppgift

Lös ekvationen $x^2 - 4x - 5 = 0$ genom att kvadratkomplettera vänsterledet.

$x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 4 - 5 = (x-2)^2 - 9 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 3 \Leftrightarrow x = 2 \pm 3 \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = 5$.

Alternativt: $x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 9 = (x-2)^2 - 3^2 = ((x-2)+3)((x-2)-3) =$
$(x+1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = 5$.

Följdfråga

Vilket är det minsta värdet som $x^2 - 4x - 5$ kan anta? För vilket x fås det minsta värdet?

$x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 9$, så uttrycket antar sitt minsta värde -9 då $x = 2$.

Kvadratrötter

Definition

$\sqrt{x}$ kallas *roten ur* x, och är det tal ≥ 0 som multiplicerat med sig själv blir x.

Kvadratrötter

Definition

$\sqrt{x}$ kallas *roten ur* x, och är det tal ≥ 0 som multiplicerat med sig själv blir x.

$$\sqrt{9} = 3$$

Kvadratrötter

Definition

$\sqrt{x}$ kallas *roten ur* x, och är det tal ≥ 0 som multiplicerat med sig själv blir x.

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{0.01} = 0.1$$

Kvadratrötter

Definition

$\sqrt{x}$ kallas *roten ur* x, och är det tal ≥ 0 som multiplicerat med sig själv blir x.

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{0.01} = 0.1$$

$$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

Kvadratrötter

Definition

$\sqrt{x}$ kallas *roten ur* x, och är det tal ≥ 0 som multiplicerat med sig själv blir x.

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{0.01} = 0.1$$

$$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$$\sqrt{-4} \text{ \emph{är odefinierat!}}$$

Kvadratrötter

Definition

$\sqrt{x}$ kallas *roten ur* x, och är det tal ≥ 0 som multiplicerat med sig själv blir x.

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{0.01} = 0.1$$

$$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$$\sqrt{-4} \textit{ är odefinierat!}$$

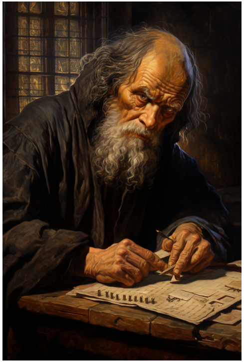
Obs!

$\sqrt{x}$ är bara definierat då $x \geq 0$, och då är $\sqrt{x} \geq 0$.
Vid ekvationslösning: $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

En till andragradsekvation

Uppgift

Lös ekvationen $x^2 = x + 1$.



En till andragradsekvation

Uppgift

Lös ekvationen $x^2 = x + 1$.

$$x^2 - x - 1 = (x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} - 1 = (x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{5}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \tfrac{1}{2})^2 = (\tfrac{\sqrt{5}}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow x - \tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{\sqrt{5}}{2}$$

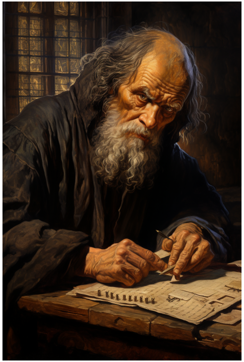
$$\Leftrightarrow x = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ eller } x = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ytterligare en andragradsekvation

Uppgift

Lös ekvationen $4 - 6x - 2x^2 = 0$.



Ytterligare en andragradsekvation

Uppgift

Lös ekvationen $4 - 6x - 2x^2 = 0$.

$$4 - 6x - 2x^2 = -2(x^2 + 3x - 2)$$

Ytterligare en andragradsekvation

Uppgift

Lös ekvationen $4 - 6x - 2x^2 = 0$.

$4 - 6x - 2x^2 = -2(x^2 + 3x - 2)$

$x^2 + 3x - 2 = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - 2 = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - \frac{8}{4} = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{17}{4} = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{3}{2})^2 = (\frac{17}{4})^2$

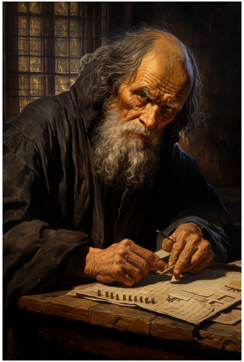
$\Leftrightarrow x + \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{17}}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ eller $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$

Uppgift

Lös ekvationen $x = -3 + \sqrt{4x + 24}$.



Uppgift

Lös ekvationen $x = -3 + \sqrt{4x+24}$.

$$
\begin{aligned}
& x = -3 + \sqrt{4x+24} \\
\Leftrightarrow\ & x + 3 = \sqrt{4x+24} \\
\Rightarrow\ & (x+3)^2 = 4x + 24 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 6x + 9 = 4x + 24 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 2x - 15 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)^2 - 16 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)^2 = 4^2 \\
\Leftrightarrow\ & x + 1 = \pm 4 \\
\Leftrightarrow\ & x = -1 \pm 4 \\
\Leftrightarrow\ & x = 3 \text{ eller } x = -5.
\end{aligned}
$$

Uppgift

Lös ekvationen $x = -3 + \sqrt{4x + 24}$.

$$
\begin{aligned}
& x = -3 + \sqrt{4x+24} \\
\Leftrightarrow\ & x + 3 = \sqrt{4x+24} \\
\Rightarrow\ & (x+3)^2 = 4x + 24 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 6x + 9 = 4x + 24 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 2x - 15 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)^2 - 16 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)^2 = 4^2 \\
\Leftrightarrow\ & x + 1 = \pm 4 \\
\Leftrightarrow\ & x = -1 \pm 4 \\
\Leftrightarrow\ & x = 3 \text{ eller } x = -5.
\end{aligned}
$$

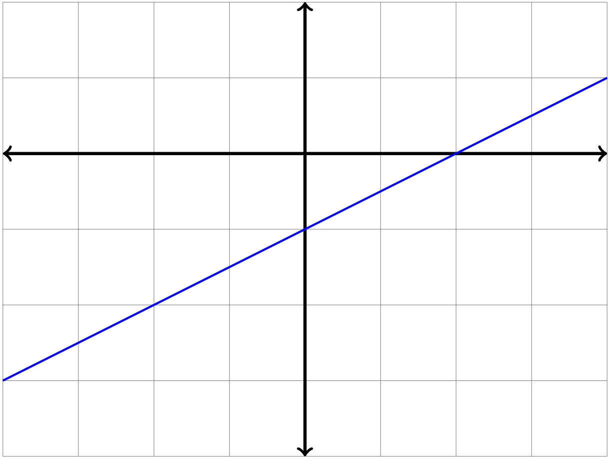
Eftersom vi endast hade implikation i andra steget måste vi testa våra lösningskandidater:
Då $x = 3$ blir ekvationen $6 = \sqrt{12 + 24}$, alltså $6 = 6$ vilket är sant, så $x = 3$ löser ekvationen.
Då $x = -5$ får vi $-2 = \sqrt{-20 + 24}$, alltså $-2 = 2$, så $x = -5$ löser ej ekvationen.
Svar: Ekvationen har endast lösningen $x = 3$.

Del IV

Linjer och cirklar

Linjer

Ekvationen $y = \frac{1}{2}x - 1$ beskriver en linje.



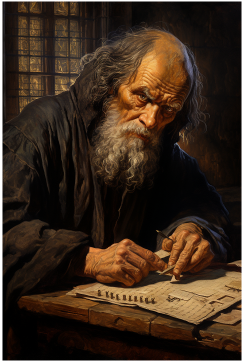
Linjer

Ekvation för en linje

En (icke lodrät) linje kan skrivas på form $y = kx + m$, där k och m är fixa tal.
k kallas linjens riktningskoefficient, den beskriver linjens lutning.
m beskriver var linjen skär y-axeln.

Uppgift

Ta fram ekvationen för den linje som går genom punkterna $(1, -2)$ och $(3, 5)$.



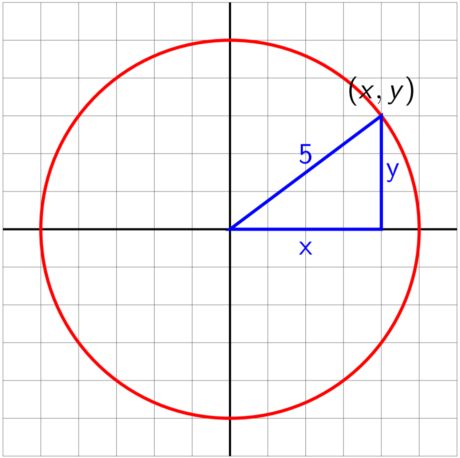
Uppgift

Ta fram ekvationen för den linje som går genom punkterna $(1, -2)$ och $(3, 5)$.

Vi har $k = \frac{\text{skillnad i y-led}}{\text{skillnad i x-led}} = \frac{5-(-2)}{3-1} = \frac{7}{2}$.
Så linjen har form $y = \frac{7}{2}x + m$. För att hitta m sätter vi in den ena punkten $(x, y) = (1, -2)$ i linjens ekvationen och får: $-2 = \frac{7}{2} \cdot 1 + m \Leftrightarrow m = -2 - \frac{7}{2} = -\frac{11}{2}$.
Svar: Linjens ekvation är $y = \frac{7}{2}x - \frac{11}{2}$.

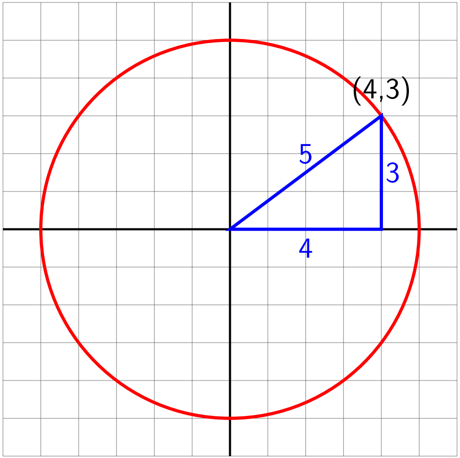
Cirklar

Ekvationen $x^2 + y^2 = 25$ beskriver en cirkel med medelpunkt i origo och radie 5.



Cirklar

Ekvationen $x^2 + y^2 = 25$ beskriver en cirkel med medelpunkt i origo och radie 5.

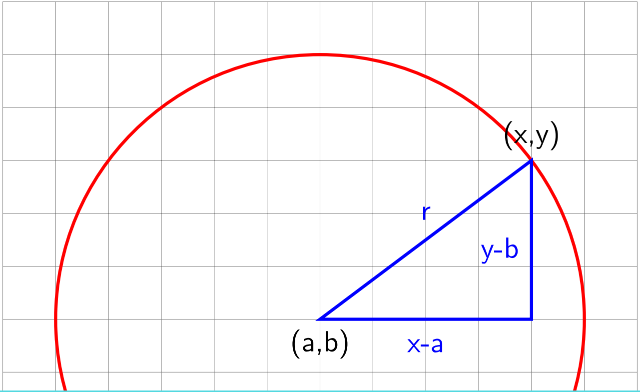


Cirklar

Ekvation för en cirkel

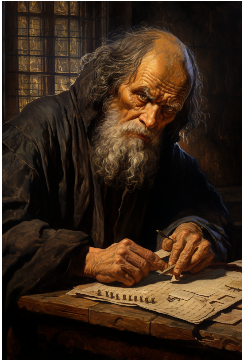
Ekvationen för en cirkel med medelpunkt i (a, b) och radie r är

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



Uppgift

Ekvationen $x^2 + y^2 + 7 - 6y + x = 0$ beskriver en cirkel. Bestäm dess medelpunkt och radie.



Uppgift

Ekvationen $x^2 + y^2 + 7 - 6y + x = 0$ beskriver en cirkel. Bestäm dess medelpunkt och radie.

Vi kvadratkompletterar x- och y-termer separat:
$x^2 + y^2 + 7 - 6y + x = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y - 3)^2 - 9 + 7 = 0$
$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + (y - 3)^2 = \frac{9}{4}$
$\Leftrightarrow (x - (-\frac{1}{2}))^2 + (y - 3)^2 = (\frac{3}{2})^2.$

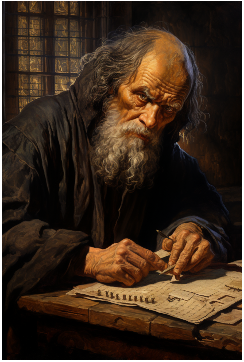
Uppgift

Ekvationen $x^2 + y^2 + 7 - 6y + x = 0$ beskriver en cirkel. Bestäm dess medelpunkt och radie.

Vi kvadratkompletterar x- och y-termer separat:
$x^2 + y^2 + 7 - 6y + x = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y - 3)^2 - 9 + 7 = 0$
$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + (y - 3)^2 = \frac{9}{4}$
$\Leftrightarrow (x - (-\frac{1}{2}))^2 + (y - 3)^2 = (\frac{3}{2})^2.$
Svar: Cirkelns medelpunkt är $(-\frac{1}{2}, 3)$ och dess radie är $\frac{3}{2}$.

Uppgift

Hitta skärningspunkterna mellan linjen $y = 2x - 3$ och cirkeln $x^2 + y^2 = 5$.



Uppgift

Hitta skärningspunkterna mellan linjen $y = 2x - 3$ och cirkeln $x^2 + y^2 = 5$.

Vi sätter in y från den första ekvationen i den andra ekvationen:

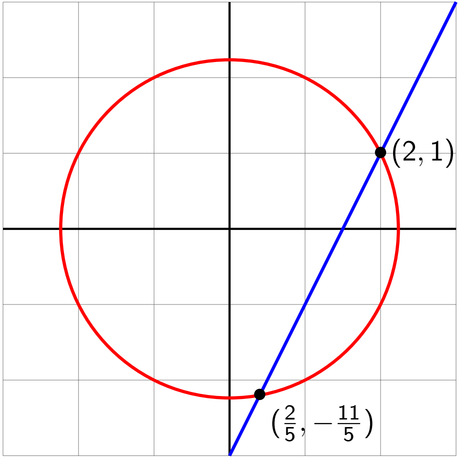
$$
\begin{aligned}
& x^2 + (2x-3)^2 = 5 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 4x^2 - 12x + 9 = 5 \\
\Leftrightarrow\ & 5x^2 - 12x + 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - \tfrac{12}{5}x + \tfrac{4}{5} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x - \tfrac{6}{5})^2 - \tfrac{36}{25} + \tfrac{20}{25} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x - \tfrac{6}{5})^2 = \tfrac{16}{25} \\
\Leftrightarrow\ & x - \tfrac{6}{5} = \pm\tfrac{4}{5} \\
\Leftrightarrow\ & x = 2 \text{ eller } x = \tfrac{2}{5}.
\end{aligned}
$$

Vi har alltså två x-koordinater för skärningen, motsvarande y-koordinater fås via $y = 2x - 3$, detta ger

Svar: Skärningspunkterna är $(2, 1)$ och $(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5})$.

Visualisering

Linjen $y = 2x - 3$ och cirkeln $x^2 + y^2 = 5$.



Del V

Polynom

Polynom

Definition

Ett **polynom** i variabeln x är ett uttryck som kan skrivas på formen

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

där koefficienterna a_i är givna reella tal.
Graden av polynomet är högsta förekommande exponent för x.

Polynom

Definition

Ett **polynom** i variabeln x är ett uttryck som kan skrivas på formen

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

där koefficienterna a_i är givna reella tal.
Graden av polynomet är högsta förekommande exponent för x.

$x^2 - 3x + 8$ är ett polynom av grad 2

$x^{100} + \pi x + 3$ är ett polynom av grad 100

$(x+1)^3 - x^3$ är ett polynom av grad 2 (polynomet kan förenklas till $3x^2 + 3x + 1$)

7 är ett polynom av grad 0.

$3x^5 + 2x^{-1}$ är *inte* ett polynom.

Polynomdivision

Vanlig heltalsdivision:

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

Polynomdivision

Vanlig heltalsdivision:

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

”När vi delar 17 med 3 är kvoten 5 och resten 2”

Polynomdivision

Vanlig heltalsdivision:

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

"När vi delar 17 med 3 är kvoten 5 och resten 2"

Notera att resten är mindre än det vi delar med.

Polynomdivision

Vanlig heltalsdivision:

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

”När vi delar 17 med 3 är kvoten 5 och resten 2”

Notera att resten är mindre än det vi delar med.

Polynomdivision:

$$\frac{2x^3+x^2-5}{x^2+3} = 2x + 1 + \frac{-6x-8}{x^2+3}$$

Polynomdivision

Vanlig heltalsdivision:

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

"När vi delar 17 med 3 är kvoten 5 och resten 2"

Notera att resten är mindre än det vi delar med.

Polynomdivision:

$$\frac{2x^3+x^2-5}{x^2+3} = 2x + 1 + \frac{-6x-8}{x^2+3}$$

"När vi delar $2x^3 + x^2 - 5$ med $x^2 + 3$ är kvoten $2x + 1$ och resten $-6x - 8$"

Polynomdivision

Vanlig heltalsdivision:

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

"När vi delar 17 med 3 är kvoten 5 och resten 2"

Notera att resten är mindre än det vi delar med.

Polynomdivision:

$$\frac{2x^3+x^2-5}{x^2+3} = 2x + 1 + \frac{-6x-8}{x^2+3}$$

"När vi delar $2x^3 + x^2 - 5$ med $x^2 + 3$ är kvoten $2x + 1$ och resten $-6x - 8$"

Notera att *graden* av resten är lägre än graden på det vi delar med.

Polynomdivision

För att dividera $p(x)$ med $q(x)$ behöver vi hitta ett polynom $k(x)$, *kvoten*, och ett polynom $r(x)$, *resten*, så att

$$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \qquad \text{där grad } r(x) < \text{grad } q(x)$$

Polynomdivision

För att dividera $p(x)$ med $q(x)$ behöver vi hitta ett polynom $k(x)$, *kvoten*, och ett polynom $r(x)$, *resten*, så att

$$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \qquad \text{där grad } r(x) < \text{grad } q(x)$$

Notera att ovanstående kan skrivas om som

$$p(x) = k(x)q(x) + r(x), \qquad \text{där grad } r(x) < \text{grad } q(x)$$

Liggande stolen

Vi dividerar $2x^3 + x + 5$ med $x + 1$:

Liggande stolen

Vi dividerar $2x^3 + x + 5$ med $x + 1$:

$$\begin{array}{r|l} \hline 2x^3 + x + 5 & \underline{x + 1} \end{array}$$

Liggande stolen

Vi dividerar $2x^3 + x + 5$ med $x + 1$:

$$
\begin{array}{l}
\quad 2x^2 \\
\hline
\quad 2x^3 + x + 5 \quad \underline{|x + 1}
\end{array}
$$

Liggande stolen

Vi dividerar $2x^3 + x + 5$ med $x + 1$:

$$
\begin{array}{ll}
2x^2 & \\
\hline
2x^3 + x + 5 & \underline{|x + 1} \\
\underline{-(2x^3 + 2x^2)} &
\end{array}
$$

Liggande stolen

Vi dividerar $2x^3 + x + 5$ med $x + 1$:

$$
\begin{array}{l|l}
\quad 2x^2 & \\
\hline
\quad 2x^3 + x + 5 & \underline{x + 1} \\
\underline{-(2x^3 + 2x^2)} & \\
\quad -2x^2 + x + 5 &
\end{array}
$$

Liggande stolen

Vi dividerar $2x^3 + x + 5$ med $x + 1$:

$$
\begin{array}{rl}
2x^2 - 2x & \\
\hline
2x^3 + x + 5 & \underline{|x+1} \\
\underline{-(2x^3 + 2x^2)} & \\
-2x^2 + x + 5 &
\end{array}
$$

Liggande stolen

Vi dividerar $2x^3 + x + 5$ med $x + 1$:

$$
\begin{array}{ll}
\quad 2x^2 - 2x & \\
\hline
\quad 2x^3 + x + 5 & \underline{|x + 1} \\
\underline{-(2x^3 + 2x^2)} & \\
\qquad -2x^2 + x + 5 & \\
\underline{-(-2x^2 - 2x)} &
\end{array}
$$

Liggande stolen

Vi dividerar $2x^3 + x + 5$ med $x + 1$:

$$
\begin{array}{l|l}
\quad 2x^2 - 2x & \\
\hline
\quad 2x^3 + x + 5 & \underline{x+1} \\
-(2x^3 + 2x^2) & \\
\hline
\quad -2x^2 + x + 5 & \\
-(-2x^2 - 2x) & \\
\hline
\quad 3x + 5 &
\end{array}
$$

Liggande stolen

Vi dividerar $2x^3 + x + 5$ med $x + 1$:

$$
\begin{array}{l|l}
\quad 2x^2 - 2x + 3 & \\
\hline
\quad 2x^3 + x + 5 & \underline{x + 1} \\
-(2x^3 + 2x^2) & \\
\hline
\quad -2x^2 + x + 5 & \\
-(-2x^2 - 2x) & \\
\hline
\quad 3x + 5 &
\end{array}
$$

Liggande stolen

Vi dividerar $2x^3 + x + 5$ med $x + 1$:

$$
\begin{array}{ll}
2x^2 - 2x + 3 & \\
\hline
2x^3 + x + 5 & \underline{|x + 1} \\
\underline{-(2x^3 + 2x^2)} & \\
-2x^2 + x + 5 & \\
\underline{-(-2x^2 - 2x)} & \\
3x + 5 & \\
\underline{-(3x + 3)} &
\end{array}
$$

Liggande stolen

Vi dividerar $2x^3 + x + 5$ med $x + 1$:

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{\quad 2x^2 - 2x + 3} & \\
\hline
\quad 2x^3 + x + 5 & x + 1 \\
\cline{2-2}
\underline{-(2x^3 + 2x^2)} & \\
\quad -2x^2 + x + 5 & \\
\underline{-(-2x^2 - 2x)} & \\
\quad 3x + 5 & \\
\underline{-(3x + 3)} & \\
\quad 2 &
\end{array}
$$

Så kvoten är $2x^2 - 2x + 3$ och resten är 2, alltså

$$\frac{2x^3 + x + 5}{x + 1} = 2x^2 - 2x + 3 + \frac{2}{x + 1}.$$

Ett trick

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)-2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{-2}{x+1} = 1 + \frac{-2}{x+1}$$

Så när $x-1$ delas med $x+1$ så är kvoten 1 och resten -2.

Faktorsatsen

Sats

Ett polynom $p(x)$ kan faktoriseras som $p(x) = (x - a)q(x)$ (där $q(x)$ är ett annat polynom) om och endast om $p(a) = 0$.

Faktorsatsen

Sats

Ett polynom $p(x)$ kan faktoriseras som $p(x) = (x - a)q(x)$ (där $q(x)$ är ett annat polynom) om och endast om $p(a) = 0$.

Exempel: $p(x) = x^3 - x$ uppfyller $p(1) = 0$, och $p(x) = (x - 1)(x^2 + x)$.

Faktorsatsen

Sats

Ett polynom $p(x)$ kan faktoriseras som $p(x) = (x - a)q(x)$ (där $q(x)$ är ett annat polynom) om och endast om $p(a) = 0$.

Exempel: $p(x) = x^3 - x$ uppfyller $p(1) = 0$, och $p(x) = (x - 1)(x^2 + x)$.

Notera att om $p(x) = (x - a)q(x)$ så kan $q(x) = \frac{p(x)}{x-a}$ hittas med polynomdivision - resten ska då bli noll.

Bevis för faktorsatsen (bonus)

Vi ska visa att $p(a) = 0 \Leftrightarrow p(x) = (x - a)q(x)$.

Bevis för faktorsatsen (bonus)

Vi ska visa att $p(a) = 0 \Leftrightarrow p(x) = (x - a)q(x)$.

Den ena implikationen ($\Leftarrow$) är enkel:
Om $p(x) = (x - a)q(x)$ så tar vi bara $x = a$ och får $p(a) = (a - a)q(a) = 0 \cdot q(a) = 0$.

Bevis för faktorsatsen (bonus)

Vi ska visa att $p(a) = 0 \;\Leftrightarrow p(x) = (x-a)q(x)$.

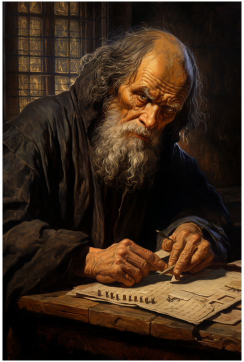
Den ena implikationen ($\Leftarrow$) är enkel:
Om $p(x) = (x-a)q(x)$ så tar vi bara $x = a$ och får $p(a) = (a-a)q(a) = 0 \cdot q(a) = 0$.

I andra riktningen ($\Rightarrow$): Vi kan dividera $p(x)$ med $x-a$ med liggande stolen och få ut $q(x)$ och $r(x)$ så att $p(x) = (x-a)q(x) + r(x)$, där graden på $r(x)$ är mindre än graden på $x-a$. Alltså är $r(x)$ en konstant, och vi har $p(x) = (x-a)q(x) + b$. Nu tar vi $x = a$ och får $p(a) = (a-a)q(a) + b \Leftrightarrow 0 = b$, där vi i sista steget använde att $p(a) = 0$. Detta visar att $p(x) = (x-a)q(x)$. Vi har nu visat att de två påståendena implicerar varandra, och därför är de ekvivalenta. Beviset är klart.

Faktorisering

Uppgift

Faktorisera polynomet $p(x) = 4x^3 - 13x + 6$ fullständigt.



Faktorisering

Uppgift

Faktorisera polynomet $p(x) = 4x^3 - 13x + 6$ fullständigt.

Vi beräknar $p(0) = 6$, $p(1) = -3$, $p(-1) = 15$, $p(2) = 12$, $p(-2) = 0$, så $p(x) = (x+2)q(x)$, vi hittar $q(x)$ genom att dela $p(x)$ med $x + 2$:

$$
\begin{array}{rl}
4x^2 - 8x + 3 & \\
\hline
4x^3 - 13x + 6 & \underline{|x + 2} \\
-(4x^3 + 8x^2) & \\
\hline
-8x^2 - 13x + 6 & \\
-(-8x^2 - 16x) & \\
\hline
3x + 6 & \\
-(3x + 3) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Så $p(x) = (x + 2)(4x^2 - 8x + 3)$.

Fortsättning

Vi faktoriserar nu den högra faktorn $4x^2 - 8x + 3$ med kvadratkomplettering.
$4x^2 - 8x + 3 = 4(x^2 - 2x + \frac{3}{4}) = 4((x-1)^2 - 1 + \frac{3}{4}) = 4((x-1)^2 - \frac{1}{4}) = 4((x-1)^2 - (\frac{1}{2})^2)$
$= 4((x-1) - \frac{1}{2})((x-1) + \frac{1}{2}) = 4(x - \frac{3}{2})(x - \frac{1}{2})$.

Slutsats: $p(x) = 4x^3 - 13x + 6 = 4(x+2)(x - \frac{3}{2})(x - \frac{1}{2})$, vilket också kan skrivas
$p(x) = (x+2)(2x-3)(2x-1)$

Lista med tecken och notation

Notation	Betydelse	Exempel
$\mathbb{N}$	Naturliga tal	$1, 2, 3, \dots$ (vissa kallar även 0 naturligt)
$\mathbb{Z}$	Heltal	$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
$\mathbb{Q}$	Rationella tal	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0.174$
$\mathbb{R}$	Reella tal	$5, \pi, \sqrt{2}$ "alla tal på tallinjen"
$\mathbb{C}$	Komplexa tal	$i, 2-3i, \sqrt{2}+\frac{1}{3}i$
$\in$	Tillhör	$x \in \mathbb{Z}$, "x är ett heltal"
$\subset$	Delmängd	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ "de naturliga talen är en delmängd av heltalen"
$[a, b]$	Slutet intervall	$[0, 1]$, alla tal mellan 0 och 1, inklusive ändpunkterna
$]a, b[$	Öppet intervall	$]2, 5[$, alla tal strikt mellan 2 och 5
$\{x \in A \mid \dots\}$	Mägdnotation	$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ är udda}\}$, mängden udda positiva heltal
$\Rightarrow$	Implikation	$x = 2 \;\Rightarrow\; x^2 = 4$, vänstra påståendet medför det högra
$\Leftrightarrow$	Ekvivalens	$2x + 3 = 5 \;\Leftrightarrow\; x = 1$, påståendena betyder exakt samma sak
$\exists$	Det existerar	$\exists x \in \mathbb{Z} \;:\; x > 1000$, det finns ett heltal större än tusen
$\forall$	För alla	$\forall x \in \mathbb{R} \;:\; x^2 \geq 0$, kvadraten av varje reellt tal är ≥ 0

Tack för idag!