# Grunk Föreläsning 2

## Olikheter, absolutbelopp, summor

Jonathan Nilsson

Linköpings Universitet

# Idag

- Olikheter
- Absolutbelopp
- Summor

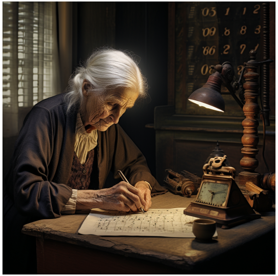
# Del I

# Olikheter

# Olikheter

## Uppgift

Lös olikheten $3x + 1 \leq 5x + 7$.



# Olikheter

## Uppgift

Lös olikheten $3x + 1 \leq 5x + 7$.

$$\begin{aligned} & 3x + 1 \leq 5x + 7 \\ \Leftrightarrow \ & -6 \leq 2x \\ \Leftrightarrow \ & x \geq -3. \end{aligned}$$

# Olikheter

## Uppgift

Lös olikheten $3x + 1 \leq 5x + 7$.

$$\begin{aligned} & 3x + 1 \leq 5x + 7 \\ \Leftrightarrow\ & -6 \leq 2x \\ \Leftrightarrow\ & x \geq -3. \end{aligned}$$

Vad är fel i följande ekvivalenskedja?

$3x + 1 \leq 5x + 7 \ \Leftrightarrow\ -2x \leq 6 \ \Leftrightarrow\ x \leq -3.$

# Olikheter

## Uppgift

Lös olikheten $3x + 1 \leq 5x + 7$.

$$\begin{aligned} & 3x + 1 \leq 5x + 7 \\ \Leftrightarrow\ & -6 \leq 2x \\ \Leftrightarrow\ & x \geq -3. \end{aligned}$$

Vad är fel i följande ekvivalenskedja?

$3x + 1 \leq 5x + 7 \ \Leftrightarrow\ -2x \leq 6 \ \Leftrightarrow\ x \leq -3.$

## Obs!

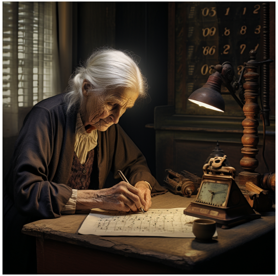
Om man multiplicerar eller dividerar båda sidor i en olikhet med ett *negativt* tal så vänds olikhetstecknet:

$$-2x \leq 5 \ \Leftrightarrow\ x \geq -\frac{2}{5}$$

# Olikheter via faktorisering

## Uppgift

Lös olikheten $x^2 > 1$.



# Olikheter via faktorisering

**Uppgift**

Lös olikheten $x^2 > 1$.

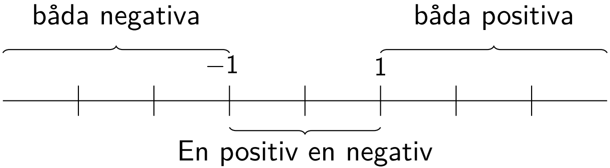
$x^2 > 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; (x+1)(x-1) > 0$
$\Leftrightarrow x > 1$ eller $x < -1$.

## Uppgift

Lös olikheten $x^2 > 1$.

$x^2 > 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; (x+1)(x-1) > 0$
$\Leftrightarrow x > 1$ eller $x < -1$.

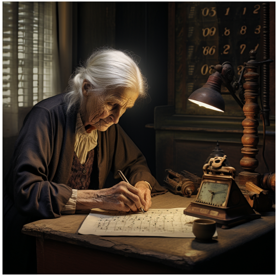
Vi markerar tecknen för faktorerna $x + 1$ och $x - 1$ på en tallinje:



# Teckentabell

## Uppgift

Lös olikheten $\frac{(x-3)(x+1)}{(x-5)x^2} \geq 0$.



# Teckentabell

**Uppgift**

Lös olikheten $\frac{(x-3)(x+1)}{(x-5)x^2} \geq 0$.

| | | -1 | | 0 | | 3 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | - | 0 | + | + | + | + | + | + | + |
| $x-3$ | - | - | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $x-5$ | - | - | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $x^2$ | + | + | + | 0 | + | + | + | + | + |
| $f(x)$ | - | 0 | + | $\wr$ | + | 0 | - | $\wr$ | + |

Där vi skrivit $f(x)$ för hela vänsterledet i uppgiften, och "$\wr$" för *odefinierat*.
Så olikheten är sann på tre intervall: $-1 \leq x < 0$, och $0 < x \leq 3$, och $x > 5$.

# Teckentabell

## Uppgift

Lös olikheten $\frac{x^2+11}{x+1} < 5$.

# Teckentabell

## Uppgift

Lös olikheten $\frac{x^2+11}{x+1} < 5$.

$$\frac{x^2+11}{x+1} < 5 \Leftrightarrow \frac{x^2+11}{x+1} - \frac{5(x+1)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{x+1} < 0$$

| | | -1 | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | - | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | - | - | - | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-3$ | - | - | - | - | - | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | - | $\wr$ | $+$ | 0 | - | 0 | $+$ |

Så olikheten är sann på två intervall: $x < -1$, och $2 < x < 3$.

Del II

# Absolutbelopp

# Absolutbelopp

Absolutbeloppet av ett tal är samma tal fast utan minustecken om talet var negativt.

$$|-5| = 5 \qquad |3| = 3 \qquad |0| = 0$$

# Absolutbelopp

Absolutbeloppet av ett tal är samma tal fast utan minustecken om talet var negativt.

$$|-5| = 5 \qquad |3| = 3 \qquad |0| = 0$$

## Definition

Absolutbeloppet av ett tal $x$ definieras som

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$$

## Bra att minnas

- $\sqrt{x^2} = |x|$ för alla reella $x$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|-x| = |x|$ (tag $y = -1$ ovan)
- $|x - y| = |y - x|$ (ty $y - x = -(x - y)$)
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ med likhet om $x$ och $y$ har samma tecken. Detta kallas triangelolikheten. Kan också skrivas $|x - y| \leq |x| + |y|$.
- $|x - y|$ är *avståndet* mellan $x$ och $y$ på tallinjen.

## Bra att minnas

- $\sqrt{x^2} = |x|$ för alla reella $x$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|-x| = |x|$ (tag $y = -1$ ovan)
- $|x - y| = |y - x|$ (ty $y - x = -(x - y)$)
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ med likhet om $x$ och $y$ har samma tecken. Detta kallas triangelolikheten. Kan också skrivas $|x - y| \leq |x| + |y|$.
- $|x - y|$ är *avståndet* mellan $x$ och $y$ på tallinjen.

Exempelvis är avståndet mellan $-3$ och 5 på tallinjen lika med $|(-3) - 5| = |-8| = 8$.

## Bra att minnas

- $\sqrt{x^2} = |x|$ för alla reella $x$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|-x| = |x|$ (tag $y = -1$ ovan)
- $|x - y| = |y - x|$ (ty $y - x = -(x - y)$)
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ med likhet om $x$ och $y$ har samma tecken. Detta kallas triangelolikheten. Kan också skrivas $|x - y| \leq |x| + |y|$.
- $|x - y|$ är *avståndet* mellan $x$ och $y$ på tallinjen.

Exempelvis är avståndet mellan $-3$ och 5 på tallinjen lika med $|(-3) - 5| = |-8| = 8$.

## Uppgift

Lös ekvationen $|x + 2| = 3$.

## Bra att minnas

- $\sqrt{x^2} = |x|$ för alla reella $x$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|-x| = |x|$ (tag $y = -1$ ovan)
- $|x - y| = |y - x|$ (ty $y - x = -(x - y)$)
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ med likhet om $x$ och $y$ har samma tecken. Detta kallas triangelolikheten. Kan också skrivas $|x - y| \leq |x| + |y|$.
- $|x - y|$ är *avståndet* mellan $x$ och $y$ på tallinjen.

Exempelvis är avståndet mellan $-3$ och $5$ på tallinjen lika med $|(-3) - 5| = |-8| = 8$.

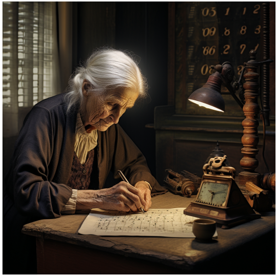
## Uppgift

Lös ekvationen $|x + 2| = 3$.

$|x - (-2)| = 3 \quad \Leftrightarrow \quad$ avståndet från $x$ till $-2$ är lika med $3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ eller $x = -5$.

## Uppgift

Lös ekvationen $|2x + 4| = 3x$.



# Ekvationer med absolutbelopp

## Uppgift

Lös ekvationen $|2x+4| = 3x$.

Vi har $|2x+4| = \begin{cases} 2x+4, & \text{om } 2x+4 \geq 0 \\ -2x-4, & \text{om } 2x+4 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+4, & \text{om } x \geq -2 \\ -2x-4, & \text{om } x \leq -2 \end{cases}$

# Ekvationer med absolutbelopp

## Uppgift

Lös ekvationen $|2x+4| = 3x$.

Vi har $|2x+4| = \begin{cases} 2x+4, & \text{om } 2x+4 \geq 0 \\ -2x-4, & \text{om } 2x+4 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+4, & \text{om } x \geq -2 \\ -2x-4, & \text{om } x \leq -2 \end{cases}$

Så vi delar upp i två fall:
Antag först att $x \geq -2$. Ekvationen är då $2x+4 = 3x \Leftrightarrow x = 4$, en lösning.

# Ekvationer med absolutbelopp

## Uppgift

Lös ekvationen $|2x+4| = 3x$.

Vi har $|2x+4| = \begin{cases} 2x+4, & \text{om } 2x+4 \geq 0 \\ -2x-4, & \text{om } 2x+4 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+4, & \text{om } x \geq -2 \\ -2x-4, & \text{om } x \leq -2 \end{cases}$

Så vi delar upp i två fall:
Antag först att $x \geq -2$. Ekvationen är då $2x+4 = 3x \Leftrightarrow x = 4$, en lösning.

Antag istället att $x < -2$, vi får då $-2x-4 = 3x \Leftrightarrow 5x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$, en motsägelse.

# Ekvationer med absolutbelopp

## Uppgift

Lös ekvationen $|2x+4| = 3x$.

Vi har $|2x+4| = \begin{cases} 2x+4, & \text{om } 2x+4 \geq 0 \\ -2x-4, & \text{om } 2x+4 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+4, & \text{om } x \geq -2 \\ -2x-4, & \text{om } x \leq -2 \end{cases}$

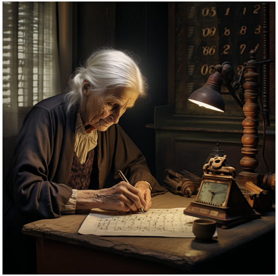
Så vi delar upp i två fall:
Antag först att $x \geq -2$. Ekvationen är då $2x+4 = 3x \Leftrightarrow x = 4$, en lösning.

Antag istället att $x < -2$, vi får då $-2x-4 = 3x \Leftrightarrow 5x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$, en motsägelse.

**Slutsats:** Ekvationens enda lösning är $x = 4$.

## Uppgift

Lös ekvationen $2|x| + 1 = |x - 3|$.



# Flera fall att undersöka

## Uppgift

Lös ekvationen $2|x| + 1 = |x - 3|$.

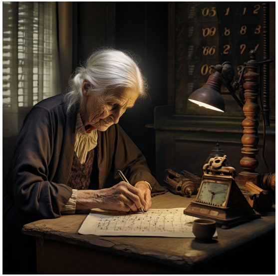
Kring punkterna $x = 0$ och $x = 3$ på tallinjen får vi olika fall, så vi delar upp tallinjen i tre delar.

Då $x \leq 0$: Ekvationen blir nu $2(-x) + 1 = 3 - x \;\Leftrightarrow\; x = -2$, så detta är en lösning.
Då $0 < x \leq 3$: Ekvationen blir $2x + 1 = 3 - x \;\Leftrightarrow\; 3x = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2}{3}$, en lösning.
Då $x < 3$: Ekvationen blir $2x + 1 = x - 3 \;\Leftrightarrow\; x = -4$, vilket inte är en lösning på detta intervall.
**Slutsats:** Ekvationens har två lösningar, $x = -2$ och $x = \frac{2}{3}$.

# Ett extra klurigt exempel

## Uppgift

Lös ekvationen $|x^2 - 1| = |2x + 3|$.



# Ett extra klurigt exempel

## Uppgift

Lös ekvationen $|x^2 - 1| = |2x + 3|$.

$|x^2 - 1| = |(x+1)(x-1)| = |x+1||x-1|$ växlar tecken kring $x = -1$ och $x = 1$ medans $2x + 3$ växlar tecken kring $x = -\frac{3}{2}$, så vi får fyra fall:

Då $x \leq -\frac{3}{2}$: $x^2 - 1 = -2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 = 0$, lösning saknas.

Då $-\frac{3}{2} < x \leq -1$: $x^2 - 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$, här är $1 - \sqrt{5}$ en lösning.

Då $-1 < x \leq 1$: $-x^2 + 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 = 0$, lösning saknas.

Då $x > 1$: $x^2 - 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$, här är $1 + \sqrt{5}$ en lösning.

# Ett extra klurigt exempel

## Uppgift

Lös ekvationen $|x^2 - 1| = |2x + 3|$.

$|x^2 - 1| = |(x+1)(x-1)| = |x+1||x-1|$ växlar tecken kring $x = -1$ och $x = 1$ medans $2x + 3$ växlar tecken kring $x = -\frac{3}{2}$, så vi får fyra fall:
Då $x \leq -\frac{3}{2}$: $x^2 - 1 = -2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 = 0$, lösning saknas.
Då $-\frac{3}{2} < x \leq -1$: $x^2 - 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$, här är $1 - \sqrt{5}$ en lösning.
Då $-1 < x \leq 1$: $-x^2 + 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 = 0$, lösning saknas.
Då $x > 1$: $x^2 - 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$, här är $1 + \sqrt{5}$ en lösning.

**Svar**: Ekvationen har två lösningar, $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

# Del III

## Summor

# Summor

$$\sum_{k=3}^{6} k^2$$

# Summor

$$\sum_{k=3}^{6} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 9 + 16 + 25 + 36 = 86$$

# Summor

$$\sum_{k=3}^{6} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 9 + 16 + 25 + 36 = 86$$

## Summasymbolen

Om $a_k$ är en talföljd som beror på $k$, och om $m$ och $n$ är heltal så är

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n,$$

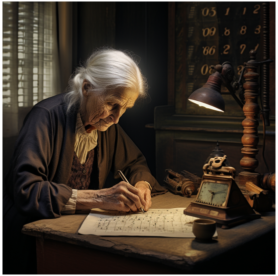
alltså summan av alla termer där $k$ antar alla heltal från och med $m$ till och med $n$.

Notera att antalet termer är $n - m + 1$.

# Notationsbyte

## Uppgift

Beräkna summan $s = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{j} + j$.



# Notationsbyte

## Uppgift

Beräkna summan $s = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{j} + j$.

$s = (\frac{1}{1} + 1) + (\frac{1}{2} + 2) + (\frac{1}{3} + 3) = 7 + \frac{3+2}{6} = \frac{47}{6}$

# Notationsbyte

## Uppgift

Beräkna summan $s = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{j} + j$.

$s = (\frac{1}{1} + 1) + (\frac{1}{2} + 2) + (\frac{1}{3} + 3) = 7 + \frac{3+2}{6} = \frac{47}{6}$

## Uppgift

Skriv $s = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}$ med summasymbol.

# Notationsbyte

## Uppgift

Beräkna summan $s = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{j} + j$.

$s = (\frac{1}{1} + 1) + (\frac{1}{2} + 2) + (\frac{1}{3} + 3) = 7 + \frac{3+2}{6} = \frac{47}{6}$

## Uppgift

Skriv $s = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}$ med summasymbol.

$$s = \sum_{k=2}^{7} \frac{1}{2k+1}$$

# Aritmetisk summa

## Definition

En summa kallas **aritmetisk** om skillnaden mellan på varandra följande termer alltid är lika, med andra ord, $\sum_{k=m}^{n} a_k$ är aritmetisk om $a_{k+1} - a_k$ är konstant.

# Aritmetisk summa

## Definition

En summa kallas **aritmetisk** om skillnaden mellan på varandra följande termer alltid är lika, med andra ord, $\sum_{k=m}^{n} a_k$ är aritmetisk om $a_{k+1} - a_k$ är konstant.

Exempel: $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$

# Aritmetisk summa

## Definition

En summa kallas **aritmetisk** om skillnaden mellan på varandra följande termer alltid är lika, med andra ord, $\sum_{k=m}^{n} a_k$ är aritmetisk om $a_{k+1} - a_k$ är konstant.

Exempel: $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$
$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (50 + 51)$

# Aritmetisk summa

## Definition

En summa kallas **aritmetisk** om skillnaden mellan på varandra följande termer alltid är lika, med andra ord, $\sum_{k=m}^{n} a_k$ är aritmetisk om $a_{k+1} - a_k$ är konstant.

Exempel: $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$
$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (50 + 51)$
$101 \cdot 50 = 5050$.

# Aritmetisk summa

## Definition

En summa kallas **aritmetisk** om skillnaden mellan på varandra följande termer alltid är lika, med andra ord, $\sum_{k=m}^{n} a_k$ är aritmetisk om $a_{k+1} - a_k$ är konstant.

Exempel: $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$
$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (50 + 51)$
$101 \cdot 50 = 5050.$

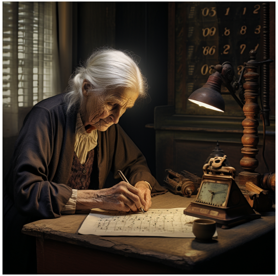
## Formel för aritmetisk summa

Om en summa $s$ är aritmetisk så gäller att

$$s = (\text{första termen} + \text{sista termen}) \cdot \frac{\text{antal termer}}{2}$$

## Uppgift

Beräkna $s = \sum_{k=-2}^{7} 3k + 5$



# Aritmetisk summa

## Uppgift

Beräkna $s = \sum_{k=-2}^{7} 3k + 5$

Summan är aritmetisk eftersom skillnaden mellan på varandra efterföljande termer är 3, så $s = (-1 + 26) \cdot \frac{10}{2} = 25 \cdot 5 = 125$

# Aritmetisk summa

## Uppgift

Beräkna $s = \sum_{k=-2}^{7} 3k + 5$

Summan är aritmetisk eftersom skillnaden mellan på varandra efterföljande termer är 3, så $s = (-1 + 26) \cdot \frac{10}{2} = 25 \cdot 5 = 125$

## Uppgift

Beräkna $s = 21 + 27 + 34 + \cdots + 75$

# Aritmetisk summa

## Uppgift

Beräkna $s = \sum_{k=-2}^{7} 3k + 5$

Summan är aritmetisk eftersom skillnaden mellan på varandra efterföljande termer är 3, så $s = (-1 + 26) \cdot \frac{10}{2} = 25 \cdot 5 = 125$

## Uppgift

Beräkna $s = 21 + 27 + 34 + \cdots + 75$

Här kan det vara svårt att se antalet termer, så vi skriver först om med summa-notation:

$$s = \sum_{k=3}^{12} 6k + 3 = (21 + 75) \cdot \frac{12 - 3 + 1}{2} = 96 \cdot 10 \cdot \tfrac{1}{2} = 48 \cdot 10 = 480.$$

# Geometrisk summa

## Definition

En summa kallas **geometrisk** om kvoten mellan på varandra följande termer alltid är lika, med andra ord, $\sum_{k=m}^{n} a_k$ är geometrisk om $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ är konstant.

# Geometrisk summa

**Definition**

En summa kallas **geometrisk** om kvoten mellan på varandra följande termer alltid är lika, med andra ord, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$ är geometrisk om $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ är konstant.

Exempel: $s = 4 + 16 + 64 + 256$ är geometrisk med kvot $q = 4$.

# Geometrisk summa

## Definition

En summa kallas **geometrisk** om kvoten mellan på varandra följande termer alltid är lika, med andra ord, $\sum_{k=m}^{n} a_k$ är geometrisk om $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ är konstant.

Exempel: $s = 4 + 16 + 64 + 256$ är geometrisk med kvot $q = 4$.
$3s = (4-1)s = 4s - s = (16 + 64 + 256 + 1024) - (4 + 16 + 64 + 256) = 1024 - 4 = 1020$,
så $s = \frac{1020}{3} = 340$.

# Geometrisk summa

## Definition

En summa kallas **geometrisk** om kvoten mellan på varandra följande termer alltid är lika, med andra ord, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$ är geometrisk om $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ är konstant.

Exempel: $s = 4 + 16 + 64 + 256$ är geometrisk med kvot $q = 4$.
$3s = (4-1)s = 4s - s = (16 + 64 + 256 + 1024) - (4 + 16 + 64 + 256) = 1024 - 4 = 1020$,
så $s = \frac{1020}{3} = 340$.

Mer allmänt: Om $s = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = \sum_{k=0}^{n} aq^k$ så är
$qs - s = (aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n+1}) - (a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n) = aq^{n+1} - a$, så
$(q-1)s = a(q^{n+1} - 1)$ och (när $q \neq 1$) har vi $s = a\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

# Formel för geometriska summor

## Formel för aritmetisk summa

Om en summa $s$ är geometrisk (med kvot$\neq 1$) så gäller att

$$s = \text{första termen} \cdot \frac{\text{kvoten}^{\text{antal termer}} - 1}{\text{kvoten} - 1}.$$

Alternativt skrivsätt:

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = a\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

# Formel för geometriska summor

## Formel för aritmetisk summa

Om en summa $s$ är geometrisk (med kvot$\neq 1$) så gäller att

$$s = \text{första termen} \cdot \frac{\text{kvoten}^{\text{antal termer}} - 1}{\text{kvoten} - 1}.$$

Alternativt skrivsätt:

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = a\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

## Uppgift

Beräkna $s = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024$

# Formel för geometriska summor

## Formel för aritmetisk summa

Om en summa $s$ är geometrisk (med kvot$\neq 1$) så gäller att

$$s = \text{första termen} \cdot \frac{\text{kvoten}^{\text{antal termer}} - 1}{\text{kvoten} - 1}.$$

Alternativt skrivsätt:

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = a\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

## Uppgift

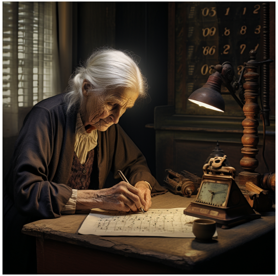
Beräkna $s = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024$

$s = 1 \cdot \frac{2^{11}-1}{2-1} = 2047.$

# Exempel

## Uppgift

Beräkna $s = \sum_{k=2}^{11} \frac{(-1)^k}{2^{k+3}}$



# Exempel

## Uppgift

Beräkna $s = \displaystyle\sum_{k=2}^{11} \frac{(-1)^k}{2^{k+3}}$

$s = \sum_{k=2}^{11} \frac{1}{8}\frac{(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=2}^{11} \frac{1}{8}(-\frac{1}{2})^k$ (så summan är geometrisk med kvot $-\frac{1}{2}$

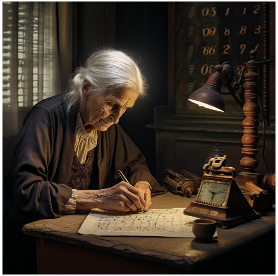
$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{(-\frac{1}{2})^{(11-2+1)}-1}{(-\frac{1}{2})-1} = \frac{1}{32} \cdot \frac{(-\frac{1}{2})^{10}-1}{(-\frac{3}{2})}$

$= -\frac{1}{32}\frac{\frac{1}{1024}-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{32}\frac{-\frac{1023}{1024}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{32}\frac{2 \cdot 1023}{3 \cdot 1024} = \frac{1}{16}\frac{1023}{3 \cdot 4096} = \frac{341}{65536}$

# Teleskopsummor

## Uppgift

Beräkna $s = \displaystyle\sum_{k=2}^{99} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$



# Teleskopsummor

## Uppgift

Beräkna $s = \sum_{k=2}^{99} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$s = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}) + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}) + \cdots + (\tfrac{1}{98} - \tfrac{1}{99}) + (\tfrac{1}{99} - \tfrac{1}{100})$$

# Teleskopsummor

## Uppgift

Beräkna $s = \sum_{k=2}^{99} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$s = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \cdots + (\frac{1}{98} - \frac{1}{99}) + (\frac{1}{99} - \frac{1}{100})$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{50-1}{100} = \frac{49}{100}.$

# Teleskopsummor

## Uppgift

Beräkna $s = \displaystyle\sum_{k=2}^{99} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$s = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \cdots + (\frac{1}{98} - \frac{1}{99}) + (\frac{1}{99} - \frac{1}{100})$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{50-1}{100} = \frac{49}{100}$.

Denna typ av summa kallas för en **teleskopsumma**.

# Teleskopsummor

**Uppgift**

Beräkna $s = \sum_{k=2}^{99} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$s = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \cdots + (\frac{1}{98} - \frac{1}{99}) + (\frac{1}{99} - \frac{1}{100})$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{50-1}{100} = \frac{49}{100}$.

Denna typ av summa kallas för en **teleskopsumma**.

# Teleskopsummor

**Uppgift**

Beräkna $s = \sum_{k=2}^{99} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$s = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \cdots + (\frac{1}{98} - \frac{1}{99}) + (\frac{1}{99} - \frac{1}{100})$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{50-1}{100} = \frac{49}{100}$.

Denna typ av summa kallas för en **teleskopsumma**.

# Teleskopsummor

## Uppgift

Beräkna $s = \sum_{k=2}^{99} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$s = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \cdots + (\frac{1}{98} - \frac{1}{99}) + (\frac{1}{99} - \frac{1}{100})$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{50-1}{100} = \frac{49}{100}.$

Denna typ av summa kallas för en **teleskopsumma**.


Tack för idag!