Grunk Föreläsning 3

Introduktion till komplexa tal

Jonathan Nilsson

Linköpings Universitet

Idag

- Komplexa tal
  - Motivation
  - Räkning med komplexa tal
  - Komplexa andragradsekvationer

Del I

Introduktion till komplexa tal

Komplexa tal

Definition

Ett **komplext tal** är ett tal som kan skrivas $a + bi$, där a och b är vanliga reella tal, och i är ett nytt tal som uppfyller $i^2 = -1$.

Komplexa tal

Definition

Ett **komplext tal** är ett tal som kan skrivas $a + bi$, där a och b är vanliga reella tal, och i är ett nytt tal som uppfyller $i^2 = -1$.
För ett komplext tal $z = a + bi$ så säger vi att:

- **Realdelen** av z är a, och vi skriver $\mathrm{Re}(z) = a$.
- **Imaginärdelen** av z är b, och vi skriver $\mathrm{Im}(z) = b$.

Komplexa tal

Definition

Ett **komplext tal** är ett tal som kan skrivas $a + bi$, där a och b är vanliga reella tal, och i är ett nytt tal som uppfyller $i^2 = -1$.
För ett komplext tal $z = a + bi$ så säger vi att:

- **Realdelen** av z är a, och vi skriver $\mathrm{Re}(z) = a$.
- **Imaginärdelen** av z är b, och vi skriver $\mathrm{Im}(z) = b$.

Notera: Varje reellt tal är också komplext (imaginärdelen kan ju vara noll).
Komplexa tal på formen bi kallas **imaginära tal** (motsvarande att realdelen är noll)

Komplexa tal

Definition

Ett **komplext tal** är ett tal som kan skrivas $a + bi$, där a och b är vanliga reella tal, och i är ett nytt tal som uppfyller $i^2 = -1$.
För ett komplext tal $z = a + bi$ så säger vi att:

- **Realdelen** av z är a, och vi skriver $\mathrm{Re}(z) = a$.
- **Imaginärdelen** av z är b, och vi skriver $\mathrm{Im}(z) = b$.

Notera: Varje reellt tal är också komplext (imaginärdelen kan ju vara noll).
Komplexa tal på formen bi kallas **imaginära tal** (motsvarande att realdelen är noll)

Obs!

Notera att $\mathrm{Im}(3 + 2i) = 2$, *inte* $2i$.

Finns komplexa tal "på riktigt"?

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ **Naturliga tal**
Kan användas för att räkna hästar eller bananer.

Finns komplexa tal ”på riktigt”?

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ **Naturliga tal**
Kan användas för att räkna hästar eller bananer.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ **Heltal**
Tillåter negativa värden och noll, kan räkna på skulder, eller hastighet i två riktningar.
Låter oss lösa $7 + x = 3$.

Finns komplexa tal "på riktigt"?

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ **Naturliga tal**
Kan användas för att räkna hästar eller bananer.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ **Heltal**
Tillåter negativa värden och noll, kan räkna på skulder, eller hastighet i två riktningar.
Låter oss lösa $7 + x = 3$.

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}$ där a och $b \neq 0$ är heltal$\}$ **Rationella tal**
Räkning på andelar, förhållanden mellan sträckor. Låter oss lösa $3x = 5$.

Finns komplexa tal ”på riktigt”?

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ **Naturliga tal**
Kan användas för att räkna hästar eller bananer.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ **Heltal**
Tillåter negativa värden och noll, kan räkna på skulder, eller hastighet i två riktningar.
Låter oss lösa $7 + x = 3$.

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}$ där a och $b \neq 0$ är heltal$\}$ **Rationella tal**
Räkning på andelar, förhållanden mellan sträckor. Låter oss lösa $3x = 5$.

$\mathbb{R} = \{$”alla tal på tallinjen”$\}$ **Reella tal**
Tillämpningar inom all form av vetenskap för mätning av storheter, även t.ex. exakt mätning diagonalen i en kvadrat. Låter oss lösa $x^2 = 2$.

Finns komplexa tal "på riktigt"?

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ **Naturliga tal**
Kan användas för att räkna hästar eller bananer.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ **Heltal**
Tillåter negativa värden och noll, kan räkna på skulder, eller hastighet i två riktningar.
Låter oss lösa $7 + x = 3$.

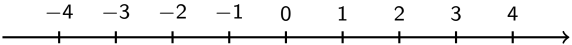
$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}$ där a och $b \neq 0$ är heltal$\}$ **Rationella tal**
Räkning på andelar, förhållanden mellan sträckor. Låter oss lösa $3x = 5$.

$\mathbb{R} = \{$"alla tal på tallinjen"$\}$ **Reella tal**
Tillämpningar inom all form av vetenskap för mätning av storheter, även t.ex. exakt mätning diagonalen i en kvadrat. Låter oss lösa $x^2 = 2$.

$\mathbb{C} = \{$"tal på form $a + bi$"$\}$ **Komplexa tal**
Tillämpningar: Oscillerande system, el-lära, flödesmekanik, signalbehandling, kvantmekanik, all avancerad matematik. Låter oss lösa $x^2 = -1$.

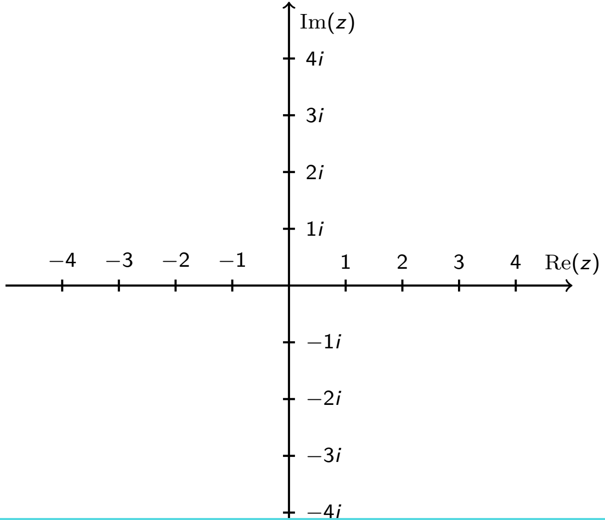
Det komplexa talplanet

En tallinje rymmer ej de komplexa talen. Talet $a + bi$ markeras på koordinaterna (a, b) i planet.



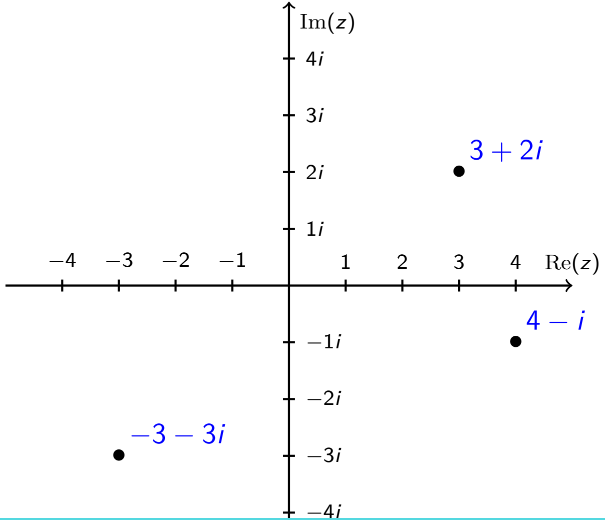
Det komplexa talplanet

En tallinje rymmer ej de komplexa talen. Talet $a + bi$ markeras på koordinaterna (a, b) i planet.



Det komplexa talplanet

En tallinje rymmer ej de komplexa talen. Talet $a + bi$ markeras på koordinaterna (a, b) i planet.



Räkning med komplexa tal

Samma räkneregler som vi är vana vid gäller även för komplexa tal, om vi bara minns att $i \cdot i = -1$.

Räkning med komplexa tal

Samma räkneregler som vi är vana vid gäller även för komplexa tal, om vi bara minns att $i \cdot i = -1$.

Addition: $(3 + i) + (5 - 4i) = 8 - 3i$
Subtraktion: $(1 + i) - (1 - i) = 2i$
Multiplikation: $(1 + 2i)(3 - i) = 3 + 6i - i - 2i^2 = 5 + 5i$
Potenser: $i^7 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot i = -i$
$(1 + i)^3 = (1 + i)(1 + 2i + i^2) = (1 + i)2i = -2 + 2i$

Konjugat

Definition

Om $z = a + bi$ är ett komplext tal, så definierar vi det **komplexa konjugatet** av z som $\overline{z} = a - bi$.

Konjugat

Definition

Om $z = a + bi$ är ett komplext tal, så definierar vi det **komplexa konjugatet** av z som $\overline{z} = a - bi$.

Exempel: $\overline{3+5i} = 3 - 5i$, $\overline{2-0.7i} = 2 + 0.7i$ Notera:

- z och $\overline{z}$ är varandras spegelbilder i den reella axeln i talplanet
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ och $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
- z är reellt $\Leftrightarrow \overline{z} = z$
- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$

Absolutbelopp

Definition

Om $z = a + bi$ är ett komplext tal, så definierar vi **absolutbeloppet** av z som $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Absolutbelopp

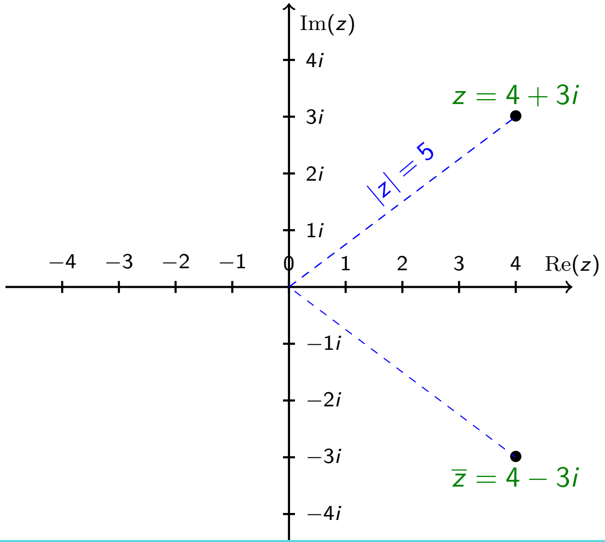
Definition

Om $z = a + bi$ är ett komplext tal, så definierar vi **absolutbeloppet** av z som $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

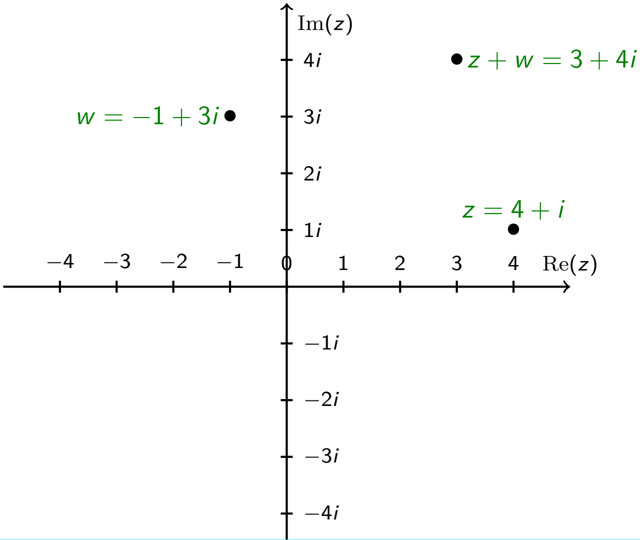
Exempel: $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ och $|-3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$ Notera:

- $|z|$ är **avståndet** från z till origo i talplanet
- $|z - w|$ är avståndet mellan z och w i talplanet
- Om z är reellt så har $|z|$ samma betydelse som det vanliga absolutbeloppet
- $z\overline{z} = |z|^2$ och alltså är $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, bevis: Låt $z = a + bi$, då är
  $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ och $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (triangelolikheten)

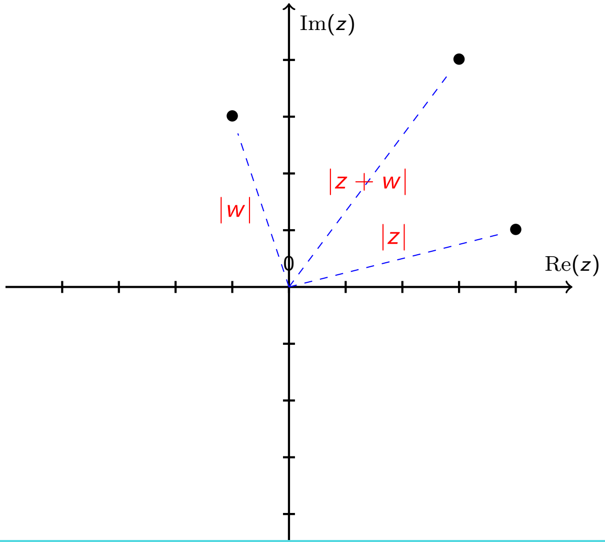
Visualisering



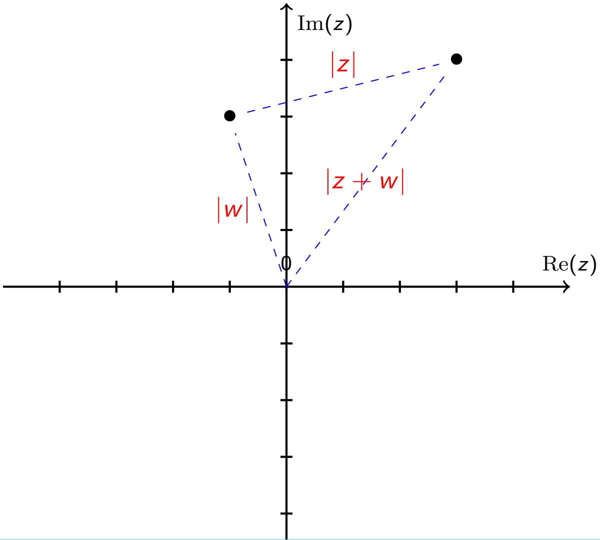
Triangelolikheten



Triangelolikheten



Triangelolikheten



Uppgift

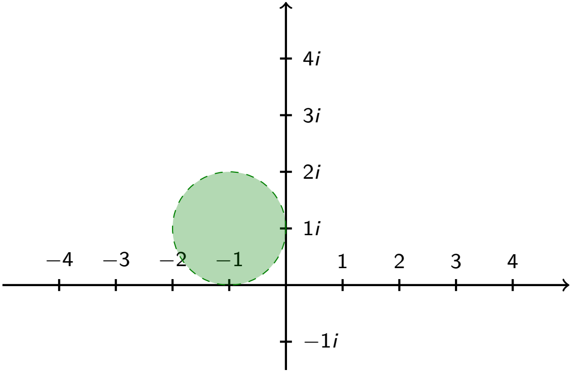
Markera i det komplexa talplanet alla z som uppfyller:

1. $|z + 1 - i| < 1$
2. $|z| = |z - 1 - i|$
3. $z - \overline{z} = 2i|z - 2i|$

Uppgift

Markera i det komplexa talplanet alla z som uppfyller:

1. $|z + 1 - i| < 1$
2. $|z| = |z - 1 - i|$
3. $z - \overline{z} = 2i|z - 2i|$

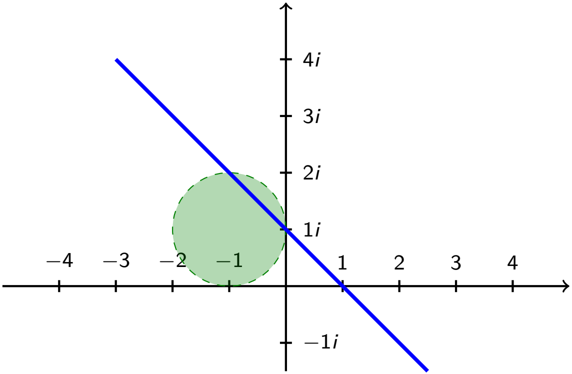


1. $|z + 1 - i| < 1 \Leftrightarrow |z - (-1 + i)| < 1 \Leftrightarrow$ "avståndet från z till $-1 + i$ är mindre än 1"
2.
3.

Uppgift

Markera i det komplexa talplanet alla z som uppfyller:

1. $|z+1-i| < 1$
2. $|z| = |z-1-i|$
3. $z - \overline{z} = 2i|z-2i|$

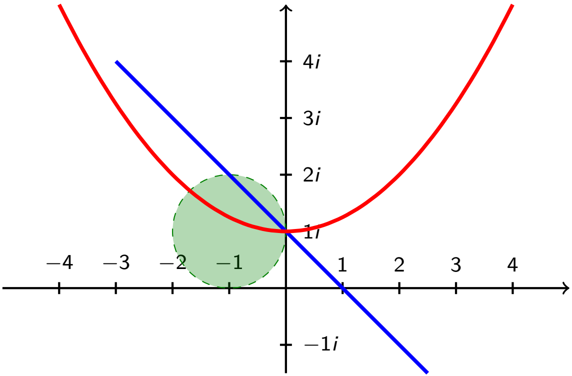


1. $|z+1-i| < 1 \Leftrightarrow |z-(-1+i)| < 1 \Leftrightarrow$ "avståndet från z till $-1+i$ är mindre än 1"
2. $|z| = |z-(1+i)| \Leftrightarrow$ "z ska ligga lika långt från origo som från $1+i$"
3.

Uppgift

Markera i det komplexa talplanet alla z som uppfyller:

1. $|z+1-i|<1$
2. $|z|=|z-1-i|$
3. $z-\overline{z}=2i|z-2i|$



1. $|z+1-i|<1 \Leftrightarrow |z-(-1+i)|<1 \Leftrightarrow$ "avståndet från z till $-1+i$ är mindre än 1"
2. $|z|=|z-(1+i)| \Leftrightarrow$ "z ska ligga lika långt från origo som från $1+i$"
3. Sätt $z=a+bi$ och förenkla: $a+bi-(a-bi)=2i\sqrt{a^2+(b-2)^2} \Leftrightarrow b=\sqrt{a^2+(b-2)^2} \Leftrightarrow b\geq 0$ och $b^2=a^2+b^2-4b+4 \Leftrightarrow b=\frac{a^2}{4}+1$

Division

Kvoten mellan två komplexa tal blir ett nytt komplext tal.

Uppgift

Skriv $\frac{3+i}{1+4i}$ på formen $a+bi$.

Division

Kvoten mellan två komplexa tal blir ett nytt komplext tal.

Uppgift

Skriv $\frac{3+i}{1+4i}$ på formen $a + bi$.

För att skriva kvoten på standardformen förlänger vi med nämnarens konjugat:

$$\frac{3+i}{1+4i} = \frac{(3+i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{7-11i}{17} = \frac{7}{17} - \frac{11}{17}i.$$

Division

Kvoten mellan två komplexa tal blir ett nytt komplext tal.

Uppgift

Skriv $\frac{3+i}{1+4i}$ på formen $a+bi$.

För att skriva kvoten på standardformen förlänger vi med nämnarens konjugat:

$$\frac{3+i}{1+4i} = \frac{(3+i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{7-11i}{17} = \frac{7}{17} - \frac{11}{17}i.$$

Uppgift

Skriv $\frac{1}{i}$ på formen $a+bi$.

Division

Kvoten mellan två komplexa tal blir ett nytt komplext tal.

Uppgift

Skriv $\frac{3+i}{1+4i}$ på formen $a + bi$.

För att skriva kvoten på standardformen förlänger vi med nämnarens konjugat:

$$\frac{3+i}{1+4i} = \frac{(3+i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{7-11i}{17} = \frac{7}{17} - \frac{11}{17}i.$$

Uppgift

Skriv $\frac{1}{i}$ på formen $a + bi$.

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{-i \cdot i} = \frac{-i}{1} = -i.$$

Del II

Komplexa andragradsekvationer

En enkel andragradsekvation

Uppgift

Lös ekvationen $z^2 = -1$

En enkel andragradsekvation

Uppgift

Lös ekvationen $z^2 = -1$

Obs!

Det är felaktigt (i den här kursen) att skriva $z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.
Problemet är att $\sqrt{x}$ är något vi bara definierat för reella $x \geq 0$.

En enkel andragradsekvation

Uppgift

Lös ekvationen $z^2 = -1$

Obs!

Det är felaktigt (i den här kursen) att skriva $z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.
Problemet är att $\sqrt{x}$ är något vi bara definierat för reella $x \geq 0$.

Korrekt redovisad lösning:

$$z^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - (-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - i^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (z - i)(z + i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = i \text{ eller } z = -i.$$

Komplexa andragradsekvationer

Uppgift

Lös ekvationen $z^2 = 3 + 4i$.

Komplexa andragradsekvationer

Uppgift

Lös ekvationen $z^2 = 3 + 4i$.

Sätt $z = a + bi$, då blir ekvationen
$(a + bi)^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i$. Om dessa komplexa tal ska vara lika måste både realdel och imaginärdel överensstämma, dessutom ska absolutbeloppen överensstämma: $a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Så vi har

$$\begin{array}{r} \mathrm{Re}: \\ \mathrm{Im}: \\ \mathrm{abs}: \end{array} \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 8 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, b = 1 \\ \text{eller} \\ a = -2, b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + i \\ \text{eller} \\ z = -2 - i \end{cases}$$

Slutligen testar vi våra lösningar: $(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$, och
$(-2 - i)^2 = (-(2 + i))^2 = (-1)^2(2 + i)^2 = 3 + 4i$.

Komplexa andragradsekvationer

Uppgift

Lös ekvationen $z^2 - 4z + 6iz - 5 - 10i = 0$.

Komplexa andragradsekvationer

Uppgift

Lös ekvationen $z^2 - 4z + 6iz - 5 - 10i = 0$.

Vi kvadratkompletterar vänsterledet, ekvationen blir:
$z^2 - 4z + 6iz - 5 - 10i = (z - (2-3i))^2 - (2-3i)^2 - 5 - 10i =$
$(z - (2-3i))^2 - (4 - 12i - 9) - 5 - 10i = (z - (2-3i))^2 + 2i = 0$
Vi gör en ansats för parentesen: $z - (2-3i) = a + bi$, då blir ekvationen
$(a+bi)^2 = -2i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = -2i$. Dessutom tar vi beloppet av båda sidor och får
$a^2 + b^2 = |-2i| = 2$. Så vi har

$$\begin{array}{r} \mathrm{Re}: \\ \mathrm{Im}: \\ \mathrm{abs}: \end{array} \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -2 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 2 \\ ab = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, b = -1 \\ \text{eller} \\ a = -1, b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 - 4i \\ \text{eller} \\ z = 1 - 2i \end{cases}$$

Där vi i sista steget använde sambandet $z = a + bi + 2 - 3i$, Slutligen testar vi våra lösningar:
$(z-(3-4i))(z-(1-2i)) = z^2-(3-4i)z-(1-2i)z+(3-4i)(1-2i) = z^2-4z-6iz-5-10i$.

Algoritm för lösning av komplexa andragradsekvationer

- Dividera ekvationen med koefficienten för z^2
- Kvadratkomplettera
- Sätt kvadraten till $a + bi$
- Ta fram de tre ekvationerna (alltid samma VL som i exemplet)
- Hitta alla par (a, b) som löser
- Återsubstituera för att få lösningarna z

Algoritm för lösning av komplexa andragradsekvationer

- Dividera ekvationen med koefficienten för z^2
- Kvadratkomplettera
- Sätt kvadraten till $a + bi$
- Ta fram de tre ekvationerna (alltid samma VL som i exemplet)
- Hitta alla par (a, b) som löser
- Återsubstituera för att få lösningarna z

Notera:

- Varje komplex andragradsekvation har minst en lösning (normalt två)
- Varje a ger precis ett b
- Undvik att skriva "$z^2 = -1$, så $z = \pm\sqrt{-1} = \pm i$". I kursen är rot-funktionen något som bara finns för reella tal ≥ 0.
- Vid kvadratkomplettering kan koefficienten för z ha både en reell och imaginär del: $z^2 + 4z - 2iz + 9 = (z + (2 - i))^2 - (2 - i)^2 + 9 = (z + (2 - i))^2 + 6 + 4i$

Ett till exempel

Uppgift

Lös ekvationen $z^2 - 3iz - 3 + i = 0$.

Ett till exempel

Uppgift

Lös ekvationen $z^2 - 3iz - 3 + i = 0$.

Vi kvadratkompletterar vänsterledet:
$z^2 - 3iz - 3 + i = (z - \frac{3}{2}i)^2 - \frac{9}{4}i^2 - 3 + i = (z - \frac{3}{2}i)^2 - \frac{3}{4} + i = 0$
Vi gör en ansats för parentesen: $z - \frac{3}{2}i = a + bi$, då blir ekvationen
$(a + bi)^2 = \frac{3}{4} - i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = \frac{3}{4} - i$. Om dessa komplexa tal ska vara lika måste både realdel och imaginärdel överensstämma, dessutom ska absolutbeloppen överensstämma:
$a^2 + b^2 = \sqrt{(\frac{3}{4})^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$. Så vi har

$$\begin{matrix} \mathrm{Re}: \\ \mathrm{Im}: \\ \mathrm{abs}: \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{3}{4} \\ 2ab = -1 \\ a^2 + b^2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 2 \\ 2ab = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, b = -\frac{1}{2} \\ \text{eller} \\ a = -1, b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + i \\ \text{eller} \\ z = -1 + 2i \end{cases}$$

Där vi i sista steget använde sambandet $z = a + bi + \frac{3}{2}i$. Slutligen testar vi våra lösningar:
$(z - (1 + i))(z - (-1 + 2i)) = z^2 - (1 + i)z - (-1 + 2i)z + (1 + i)(-1 + 2i) = z^2 - 3iz - 3 + i$.

Tack för idag!