Grunk Föreläsning 4

Polynom och binomialutveckling

Jonathan Nilsson

Linköpings Universitet

Idag

- Polynom och komplexa tal
  - Nollställen och faktorisering
  - Ett par satser
- Binomialutveckling

Del I

Polynom och komplexa tal

Faktorsatsen

Sats

Låt $p(z)$ vara ett polynom, och antag att α är ett nollställe till $p(z)$, alltså att $p(\alpha) = 0$. Då finns det ett polynom $q(z)$ så att $p(z) = (z - \alpha)q(z)$. Eller mer kortfattat:

$$p(\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; p(z) = (z - \alpha)q(z).$$

Polynomet $q(z)$ hittas genom att dividera $p(z)$ med $z - \alpha$.

Faktorsatsen

Sats

Låt $p(z)$ vara ett polynom, och antag att α är ett nollställe till $p(z)$, alltså att $p(\alpha) = 0$. Då finns det ett polynom $q(z)$ så att $p(z) = (z - \alpha)q(z)$. Eller mer kortfattat:

$$p(\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; p(z) = (z - \alpha)q(z).$$

Polynomet $q(z)$ hittas genom att dividera $p(z)$ med $z - \alpha$.

Notera: om vi bara jobbar med **reella tal** så går vissa polynom inte att faktorisera till förstagradsfaktorer: $p(z) = z^2 + 1$ saknar ju exempelvis nollställen.

Faktorsatsen

Sats

Låt $p(z)$ vara ett polynom, och antag att α är ett nollställe till $p(z)$, alltså att $p(\alpha) = 0$. Då finns det ett polynom $q(z)$ så att $p(z) = (z - \alpha)q(z)$. Eller mer kortfattat:

$$p(\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; p(z) = (z - \alpha)q(z).$$

Polynomet $q(z)$ hittas genom att dividera $p(z)$ med $z - \alpha$.

Notera: om vi bara jobbar med **reella tal** så går vissa polynom inte att faktorisera till förstagradsfaktorer: $p(z) = z^2 + 1$ saknar ju exempelvis nollställen.
Men om vi jobbar med komplexa tal är $z = i$ och $z = -i$ nollställen, så med faktorsatsen får vi $p(z) = (z + i)(z - i)$.

Nollställen och multiplicitet

Ett andragradspolynom har normalt två nollställen, men ibland händer det att nollställena sammafaller:

$$p(x) = z^2 - 11z + 30 = (z-5)(z-6) \qquad q(z) = z^2 - 6z + 9 = (z-3)^2$$

Nollställen och multiplicitet

Ett andragradspolynom har normalt två nollställen, men ibland händer det att nollställena sammafaller:

$$p(x) = z^2 - 11z + 30 = (z-5)(z-6) \qquad q(z) = z^2 - 6z + 9 = (z-3)^2$$

Här säger vi att nollstället 3 till $q(z)$ har *multiplicitet* 2.

Nollställen och multiplicitet

Ett andragradspolynom har normalt två nollställen, men ibland händer det att nollställena sammafaller:

$$p(x) = z^2 - 11z + 30 = (z-5)(z-6) \qquad q(z) = z^2 - 6z + 9 = (z-3)^2$$

Här säger vi att nollstället 3 till $q(z)$ har *multiplicitet* 2.

Definition

Om $p(z)$ är ett nollskilt polynom, och om α är ett nollställe till $p(z)$, så definieras **multipliciteten** av nollstället α som det heltal n så att $p(z) = (z-\alpha)^n k(z)$, där $k(z)$ är ett polynom och $k(\alpha) \neq 0$.

Nollställen och multiplicitet

Ett andragradspolynom har normalt två nollställen, men ibland händer det att nollställena sammafaller:

$$p(x) = z^2 - 11z + 30 = (z-5)(z-6) \qquad q(z) = z^2 - 6z + 9 = (z-3)^2$$

Här säger vi att nollstället 3 till $q(z)$ har *multiplicitet* 2.

Definition

Om $p(z)$ är ett nollskilt polynom, och om α är ett nollställe till $p(z)$, så definieras **multipliciteten** av nollstället α som det heltal n så att $p(z) = (z-\alpha)^n k(z)$, där $k(z)$ är ett polynom och $k(\alpha) \neq 0$.

Exempel: Polynomet $p(z) = z^3(z+2)^5(z-6)^2$ har tre *olika* nollställen.
Nollstället 0 har multiplicitet 3, nollstället -2 har multiplicitet 5, och nollstället 6 har multiplicitet 2.
Även om $p(z)$ bara har tre olika nollställen, så säger vi att $p(z)$ har 10 nollställen räknat med multiplicitet.

Algebrans fundamentalsats

Sats

Ett polynom med grad $n \geq 1$ har n stycken nollställen i $\mathbb{C}$, räknat med sin multiplicitet.

Algebrans fundamentalsats

Sats

Ett polynom med grad $n \geq 1$ har n stycken nollställen i $\mathbb{C}$, räknat med sin multiplicitet.

Följdsats

Varje polynom $p(z)$ kan faktoriseras fullständigt över $\mathbb{C}$; det finns komplexa tal a och $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, där n är polynomets grad, så att

$$p(z) = a(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$$

Algebrans fundamentalsats

Sats

Ett polynom med grad $n \geq 1$ har n stycken nollställen i $\mathbb{C}$, räknat med sin multiplicitet.

Följdsats

Varje polynom $p(z)$ kan faktoriseras fullständigt över $\mathbb{C}$; det finns komplexa tal a och $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, där n är polynomets grad, så att

$$p(z) = a(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$$

Exempel:

$2x^6 - 2x^2 = 2x^2(x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$

$z^4 + 4 = (z-(1+i))(z-(1-i))(z+(1-i))(z+(1+i))$

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$

Hur faktoriserar man polynom av grad 3 och högre?

De goda nyheterna

Precis som vi har "pq-formeln" för andragradsekvationer finns det formler för hur man löser tredje och fjärdegradsekvationer.

Tartaglia, Cardano, Ferrari
Italien, 1500-talet.

De dåliga nyheterna...

Formel för tredjegradsekvationen $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$:

$$x = \frac{\sqrt[3]{-2a^3 + 3\sqrt{3}\,\sqrt{4a^3c - a^2b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2} + 9ab - 27c}}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{2}\,(3b - a^2)}{3\sqrt[3]{-2a^3 + 3\sqrt{3}\,\sqrt{4a^3c - a^2b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2} + 9ab - 27c}} - \frac{a}{3}$$

$$x = -\frac{1}{6\sqrt[3]{2}}(1 - i\sqrt{3})\sqrt[3]{-2a^3 + 3\sqrt{3}\,\sqrt{4a^3c - a^2b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2} + 9ab - 27c} + \frac{(1 + i\sqrt{3})(3b - a^2)}{3 \times 2^{2/3}\sqrt[3]{-2a^3 + 3\sqrt{3}\,\sqrt{4a^3c - a^2b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2} + 9ab - 27c}} - \frac{a}{3}$$

$$x = -\frac{1}{6\sqrt[3]{2}}(1 + i\sqrt{3})\sqrt[3]{-2a^3 + 3\sqrt{3}\,\sqrt{4a^3c - a^2b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2} + 9ab - 27c} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(3b - a^2)}{3 \times 2^{2/3}\sqrt[3]{-2a^3 + 3\sqrt{3}\,\sqrt{4a^3c - a^2b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2} + 9ab - 27c}} - \frac{a}{3}$$

De dåliga nyheterna...

Formel för fjärdegradsekvationen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$:

$$r_1 = \frac{-a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}} + \left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}$$
$$- \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{4b}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}} - \left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{-a^3+4ab-8c}{4\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}}}$$

$$r_2 = \frac{-a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}} + \left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}$$
$$- \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{4b}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}} - \left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{-a^3+4ab-8c}{4\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}}}$$

$$r_3 = \frac{-a}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}} + \left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}$$
$$- \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{4b}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}} - \left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{-a^3+4ab-8c}{4\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}}}$$

$$r_4 = \frac{-a}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}} + \left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}$$
$$- \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{4b}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}} - \left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{-a^3+4ab-8c}{4\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}}}$$

Finns det någon formel för femtegradsevationer?


Évariste Galois, 1811-1832 och Niels Henrik Abel, 1802-1829

Finns det någon formel för femtegradsevationer?

Évariste Galois, 1811-1832 och Niels Henrik Abel, 1802-1829

Abel och Galois bevisade att ingen sådan formel kan finnas.

I vår kurs

Hitta ett nollställe α genom att gissa, och dividera polynomet med $x - \alpha$. Upprepa tills graden är < 3.

Uppgift

Faktorisera $p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$ fullständigt.

I vår kurs

Hitta ett nollställe α genom att gissa, och dividera polynomet med $x - \alpha$. Upprepa tills graden är < 3.

Uppgift

Faktorisera $p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$ fullständigt.

Vi sätter in ett par värden på x: $p(0) = -2$, $p(1) = -2$, $p(-1) = 0$, här hittade vi ett nollställe, så $p(x)$ är delbart med $x + 1$. Polynomdivision ger att $p(x) = (x + 1)(x^2 - 2) = (x + 1)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$. Den andra faktorn kan faktoriseras med kvadratkomplettering, vi får $p(x) = (x + 1)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$.

Satser som kan hjälpa

Sats

Antag att ett polynom har **reella koefficienter**, och att α är ett komplext nollställe. Då är även $\overline{\alpha}$ ett nollställe.

Satser som kan hjälpa

Sats

Antag att ett polynom har **reella koefficienter**, och att α är ett komplext nollställe. Då är även $\overline{\alpha}$ ett nollställe.

Bevis: Antag att $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, och att $p(\alpha) = 0$. Då är

$$p(\overline{\alpha}) = a_n \overline{\alpha}^n + \cdots + a_2 \overline{\alpha}^2 + a_1 \overline{\alpha} + a_0$$
$$= a_n \overline{\alpha^n} + \cdots + a_2 \overline{\alpha^2} + a_1 \overline{\alpha} + a_0 = \overline{a_n \alpha^n} + \cdots + \overline{a_2 \alpha^2} + \overline{a_1 \alpha} + \overline{a_0}$$
$$= \overline{a_n \alpha^n + \cdots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0} = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0.$$

Satser som kan hjälpa

Sats

Antag att ett polynom har **reella koefficienter**, och att α är ett komplext nollställe. Då är även $\overline{\alpha}$ ett nollställe.

Bevis: Antag att $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, och att $p(\alpha) = 0$. Då är

$$p(\overline{\alpha}) = a_n \overline{\alpha}^n + \cdots + a_2 \overline{\alpha}^2 + a_1 \overline{\alpha} + a_0$$
$$= a_n \overline{\alpha^n} + \cdots + a_2 \overline{\alpha^2} + a_1 \overline{\alpha} + a_0 = \overline{a_n \alpha^n} + \cdots + \overline{a_2 \alpha^2} + \overline{a_1 \alpha} + \overline{a_0}$$
$$= \overline{a_n \alpha^n + \cdots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0} = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0.$$

Sats

Antag att $p(x) = x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ endast har heltal som nollställen. Då är varje nollställe en faktor till a_0.

Satser som kan hjälpa

Sats

Antag att ett polynom har **reella koefficienter**, och att α är ett komplext nollställe. Då är även $\overline{\alpha}$ ett nollställe.

Bevis: Antag att $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, och att $p(\alpha) = 0$. Då är
$p(\overline{\alpha}) = a_n \overline{\alpha}^n + \cdots + a_2 \overline{\alpha}^2 + a_1 \overline{\alpha} + a_0$
$= a_n \overline{\alpha^n} + \cdots + a_2 \overline{\alpha^2} + a_1 \overline{\alpha} + a_0 = \overline{a_n \alpha^n} + \cdots + \overline{a_2 \alpha^2} + \overline{a_1 \alpha} + \overline{a_0}$
$= \overline{a_n \alpha^n + \cdots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0} = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0.$

Sats

Antag att $p(x) = x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ endast har heltal som nollställen. Då är varje nollställe en faktor till a_0.

Bevis: Om $p(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ där α_i är heltal, så blir konstanttermen $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$.
Användning: Med $p(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$ är konstanttermen 15, så när vi gissar rötter kan det vara smart att börja med delarna till 15: $\pm 1, \pm 3, \pm 5$. $(p(x) = (x+5)(x-3)(x-1))$

Uppgift

Lös ekvationen $z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 2z - 4 = 0$.

Uppgift

Lös ekvationen $z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 2z - 4 = 0$.

Polynomet $p(z)$ i vänsterledet har reella koefficienter, vi försöker gissa ett par rötter och ser att $z = -1$ och $z = 2$ löser ekvationen. Därför är både $(z+1)$ och $(z-2)$ faktorer i $p(z)$, så $p(z)$ är delbart med $(z+1)(z-2) = z^2 - z - 2$. Polynomdivision ger att $p(z) = (z+1)(z-2)(z^2 - 2z + 2)$. För att faktorisera andragradsfaktorn ytterligare kan vi använda standardmetoden för lösningar av andragradsekvationer, men i det här fallet är det ganska enkelt att se att $z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 + 1 = (z-1)^2 - i^2 = (z-1-i)(z-1+i)$.
Slutsats: Vänsterledet är $(z+1)(z-2)(z-1-i)(z-1+i)$, så ekvationen har fyra lösningar: $z \in \{-1, 2, 1+i, 1-i\}$.

Del II

Binomialutveckling

Vad får man när man expanderar

$$(a+b)^n?$$

Kan man skriva det med en summasymbol?

Potenser av summor

$$(a+b)^0 = \qquad 1$$

Potenser av summor

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1\\(a+b)^1 &= a+b\end{aligned}$$

Potenser av summor

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2
\end{aligned}
$$

Potenser av summor

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}
$$

Potenser av summor

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{aligned}
$$

Potenser av summor

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5
\end{aligned}
$$

Potenser av summor

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \\
(a+b)^6 &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6
\end{aligned}
$$

Pascals Triangel

									1									
								1		1								
							1		2		1							
						1		3		3		1						
					1		4		6		4		1					
				1		5		10		10		5		1				
			1		6		15		20		15		6		1			
		1		7		21		35		35		21		7		1		
	1		8		28		56		70		56		28		8		1	
⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮

Fakultet

Definition

För positiva heltal n definierar vi $n!$ (uttalas n-fakultet) som produkten av alla naturliga tal upp till och med n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Fakultet

Definition

För positiva heltal n definierar vi $n!$ (uttalas n-fakultet) som produkten av alla naturliga tal upp till och med n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Exempel:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \qquad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \qquad 10! = 3628800$$

Fakultet

Definition

För positiva heltal n definierar vi $n!$ (uttalas n-fakultet) som produkten av alla naturliga tal upp till och med n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Exempel:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \qquad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \qquad 10! = 3628800$$

$$\frac{100!}{98!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 97 \cdot 98} = 99 \cdot 100 = 9900$$

Fakultet

Definition

För positiva heltal n definierar vi $n!$ (uttalas n-fakultet) som produkten av alla naturliga tal upp till och med n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Exempel:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \qquad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \qquad 10! = 3628800$$

$$\frac{100!}{98!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 97 \cdot 98} = 99 \cdot 100 = 9900$$

Observera:

- $0!$ definieras som 1
- $n!$ är antalet sätt som n personer kan ordnas i en kö

Binomialkoefficienter

Definition

Vi definierar **binomialkoefficienten** $\binom{n}{k}$, som utläses "n över k", som $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Binomialkoefficienter

Definition

Vi definierar **binomialkoefficienten** $\binom{n}{k}$, som utläses "n över k", som $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exempel:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6 \qquad \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

Binomialkoefficienter

Definition

Vi definierar **binomialkoefficienten** $\binom{n}{k}$, som utläses "n över k", som $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exempel:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6 \qquad \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

Observera:

- För att fakulteterna ska vara definierade krävs att $n \geq k \geq 0$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ och $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$
- $\binom{n}{k}$ är *antalet olika sätt* att bland n stycken objekt, välja ut exakt k stycken

En tabell med binomialkoefficienter

På rad n position k skriver vi ut $\binom{n}{k}$:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

Pascals triangel återvänder!

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

Binomialsatsen

Sats

För $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ har vi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Binomialsatsen

Sats

För $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ har vi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Exempel:

$$(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} b^k = \binom{4}{0} a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^1 b^3 + \binom{4}{4} a^0 b^4$$

$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Exempel

Uppgift

Utveckla $(2x - y)^4$ med hjälp av binomialsatsen.

Exempel

Uppgift

Utveckla $(2x - y)^4$ med hjälp av binomialsatsen.

$$(2x - y)^4 = (2x + (-y))^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k}(2x)^{4-k}(-y)^k$$

$$= \binom{4}{0}(2x)^4(-y)^0 + \binom{4}{1}(2x)^3(-y)^1 + \binom{4}{2}(2x)^2(-y)^2 + \binom{4}{3}(2x)^1(-y)^3 + \binom{4}{4}(2x)^0(-y)^4$$

$$= 1 \cdot 16x^4 - 4 \cdot 8x^3y + 6 \cdot 4x^2y^2 - 4 \cdot 2xy^3 + 1 \cdot y^4$$

$$= 16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4$$

Exempel

Uppgift

Vad blir koefficienten för x^4 i $(3x - \sqrt{2})^{10}$?

Exempel

Uppgift

Vad blir koefficienten för x^4 i $(3x - \sqrt{2})^{10}$?

$$(3x - \sqrt{2})^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (3x)^{10-k} (-\sqrt{2})^k$$

Här ser vi att den term där exponenten för x är 4 motsvarar $k = 6$, den termen är

$$\binom{10}{6} (3x)^{10-6} (-\sqrt{2})^6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} 3^4 x^4 2^3 = \frac{10 \cdot 3 \cdot 7}{1} 81 \cdot 8x^4 = 210 \cdot 648x^4 = 136080x^4.$$

Svar: Koefficienten för x^4 i $(3x - \sqrt{2})^{10}$ är 136080.

Tack för idag!