Grunk Föreläsning 5

Funktionsbegreppet

Jonathan Nilsson

Linköpings Universitet

Sammanfattning av mittkursvärderingen

- Överlag var ni mycket nöjda mer kursen
- Föreläsningarna
  - Kombinationen slides+tavelräkningar uppskattas
  - Bra att jag räknar i lugnt tempo på tavlan
  - Bra att kunna repetera med slides efteråt hemma
  - Det kan gå för snabbt på slides ibland i teorigenomgången

Sammanfattning av mittkursvärderingen

- Överlag var ni mycket nöjda mer kursen
- Föreläsningarna
  - Kombinationen slides+tavelräkningar uppskattas
  - Bra att jag räknar i lugnt tempo på tavlan
  - Bra att kunna repetera med slides efteråt hemma
  - Det kan gå för snabbt på slides ibland i teorigenomgången
- Lektioner
  - Lagom balans genomgång/räkning
  - Vissa tycker listan med rekommenderade uppgifter kan förbättras

Sammanfattning av mittkursvärderingen

- Överlag var ni mycket nöjda mer kursen
- Föreläsningarna
  - Kombinationen slides+tavelräkningar uppskattas
  - Bra att jag räknar i lugnt tempo på tavlan
  - Bra att kunna repetera med slides efteråt hemma
  - Det kan gå för snabbt på slides ibland i teorigenomgången
- Lektioner
  - Lagom balans genomgång/räkning
  - Vissa tycker listan med rekommenderade uppgifter kan förbättras
- Handledningspass och inlämningsuppgifter
  - Ni är nöjda med Martin
  - Rättning och komplettering fungerar bra
  - Uppskattat att det finns tid att arbeta med inlämningsuppgifter
  - Ni tycker inlämningsuppgifterna är lärorika

Idag

- Vad är en funktion?
- Funktionsinvers
- Kurvritning

Del I

Funktionsbegreppet

Funktionsbegreppet

Definition

En funktion f består av en definitionsmängd D_f, en målmängd M, och en entydig regel som för varje x i D_f tilldelar ett värde $f(x)$ i M. Vi skriver $f : D_f \to M$ för att markera definitionsmängd och målmängd.

Funktionsbegreppet

Definition

En funktion f består av en definitionsmängd D_f, en målmängd M, och en entydig regel som för varje x i D_f tilldelar ett värde $f(x)$ i M. Vi skriver $f : D_f \to M$ för att markera definitionsmängd och målmängd.

Exempel:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = x^2$ är en funktion. Exempelvis har vi $f(-2) = 4$

Funktionsbegreppet

Definition

En funktion f består av en definitionsmängd D_f, en målmängd M, och en entydig regel som för varje x i D_f tilldelar ett värde $f(x)$ i M. Vi skriver $f : D_f \to M$ för att markera definitionsmängd och målmängd.

Exempel:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = x^2$ är en funktion. Exempelvis har vi $f(-2) = 4$

$s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $s(x) = \begin{cases} x^2 & \text{när } 0 < x < 3 \\ 1 & \text{annars} \end{cases}$ är en funktion. $s(\sqrt{5}) = 5$ och $s(\pi) = 1$.

Definition

En funktion f består av en definitionsmängd D_f, en målmängd M, och en entydig regel som för varje x i D_f tilldelar ett värde $f(x)$ i M. Vi skriver $f : D_f \to M$ för att markera definitionsmängd och målmängd.

Exempel:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = x^2$ är en funktion. Exempelvis har vi $f(-2) = 4$

$s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $s(x) = \begin{cases} x^2 & \text{när } 0 < x < 3 \\ 1 & \text{annars} \end{cases}$ är en funktion. $s(\sqrt{5}) = 5$ och $s(\pi) = 1$.

$g : \{$🍏, 🍌, 🍊$\} \to \{$🍏, 🍌, 🍊$\}$, där $g($🍏$) =$ 🍌, $g($🍌$) =$ 🍏, $g($🍊$) =$ 🍌

Funktionsbegreppet

Definition

En funktion f består av en definitionsmängd D_f, en målmängd M, och en entydig regel som för varje x i D_f tilldelar ett värde $f(x)$ i M. Vi skriver $f : D_f \to M$ för att markera definitionsmängd och målmängd.

Exempel:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = x^2$ är en funktion. Exempelvis har vi $f(-2) = 4$

$s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $s(x) = \begin{cases} x^2 & \text{när } 0 < x < 3 \\ 1 & \text{annars} \end{cases}$ är en funktion. $s(\sqrt{5}) = 5$ och $s(\pi) = 1$.

$g : \{$, , $\} \to \{$, , $\}$, där $g($$) =$ , $g($$) =$ , $g($$) =$ 

$h : \{\text{alla djur}\} \to \mathbb{Z}$, där $h(x) =$ antal ben på x. Exempelvis: $h($$) = 8$ och $h($$) = 0$

Notation

- Att $y = f(x)$ kan också skrivas $f : x \mapsto y$. Vi säger att "f avbildar x på y" eller "f av x är y" eller "f skickar x till y"

Notation

- Att $y = f(x)$ kan också skrivas $f : x \mapsto y$. Vi säger att "f avbildar x på y" eller "f av x är y" eller "f skickar x till y"
- I den här kursen kommer målmängden att vara $\mathbb{R}$

Notation

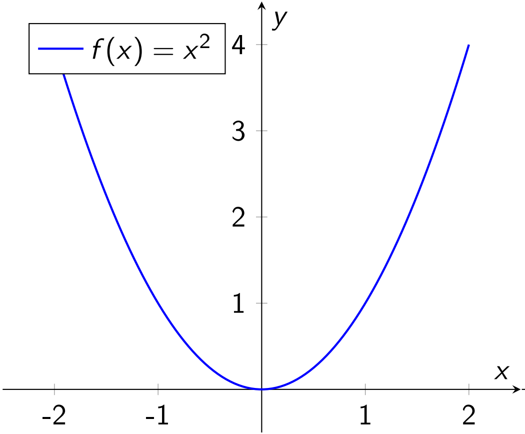
- Att $y = f(x)$ kan också skrivas $f : x \mapsto y$. Vi säger att "f avbildar x på y" eller "f av x är y" eller "f skickar x till y"
- I den här kursen kommer målmängden att vara $\mathbb{R}$
- ...och definitionsmängden kommer att vara en delmängd till $\mathbb{R}$

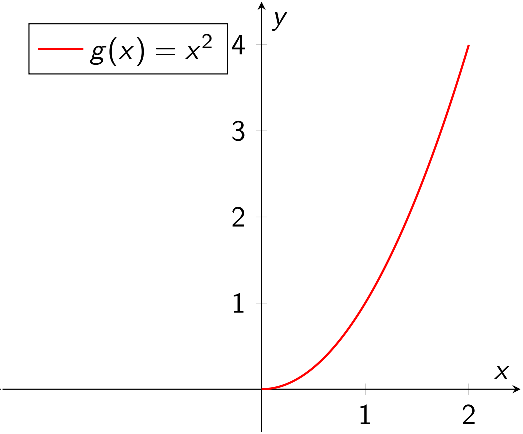
Notation

- Att $y = f(x)$ kan också skrivas $f : x \mapsto y$. Vi säger att "f avbildar x på y" eller "f av x är y" eller "f skickar x till y"
- I den här kursen kommer målmängden att vara $\mathbb{R}$
- ...och definitionsmängden kommer att vara en delmängd till $\mathbb{R}$

Samma regel - olika definitionsmängd

Låt $f(x) = x^2$ där $D_f = \mathbb{R}$ och låt $g(x) = x^2$ där $D_g = [0, \infty[$. Detta är **olika** funktioner.





Naturlig definitionsmängd

Om inte D_f anges för en regel f ska det tolkas som att D_f är den största möjliga delmängd av $\mathbb{R}$ där regeln fungerar. Detta kallas ibland för den *naturliga definitionsmängden*.

Uppgift

Ange definitionsmängd till var och en av
$f(x) = \sqrt{x-5} + \frac{1}{x-7}$ och $g(x) = \frac{x-1}{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

Naturlig definitionsmängd

Om inte D_f anges för en regel f ska det tolkas som att D_f är den största möjliga delmängd av $\mathbb{R}$ där regeln fungerar. Detta kallas ibland för den *naturliga definitionsmängden*.

Uppgift

Ange definitionsmängd till var och en av
$f(x) = \sqrt{x-5} + \frac{1}{x-7}$ och $g(x) = \frac{x-1}{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5 \text{ och } x \neq 7\}$. Kan också skrivas $D_f = [5,7[\cup]7,\infty[$.

Naturlig definitionsmängd

Om inte D_f anges för en regel f ska det tolkas som att D_f är den största möjliga delmängd av $\mathbb{R}$ där regeln fungerar. Detta kallas ibland för den *naturliga definitionsmängden*.

Uppgift

Ange definitionsmängd till var och en av
$f(x) = \sqrt{x-5} + \frac{1}{x-7}$ och $g(x) = \frac{x-1}{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5 \text{ och } x \neq 7\}$. Kan också skrivas $D_f = [5,7[\cup]7,\infty[$.

$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2 \text{ och } x \neq \pm 1\}$.

Värdemängd

Definition

Värdemängden för en funktion f är $V_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$, eller informellt i ord ”alla värden som funktionen kan ge”.

Värdemängd

Definition

Värdemängden för en funktion f är $V_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$, eller informellt i ord "alla värden som funktionen kan ge".

Vilka är värdemängderna för funktionerna nedan?

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = x^2$

Värdemängd

Definition

Värdemängden för en funktion f är $V_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$, eller informellt i ord "alla värden som funktionen kan ge".

Vilka är värdemängderna för funktionerna nedan?

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = x^2 \;\Rightarrow\; V_f = [0, \infty[$.

Värdemängd

Definition

Värdemängden för en funktion f är $V_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$, eller informellt i ord "alla värden som funktionen kan ge".

Vilka är värdemängderna för funktionerna nedan?

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = x^2 \;\Rightarrow\; V_f = [0, \infty[$.

$h : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ där $h(x) = x^2$

Värdemängd

Definition

Värdemängden för en funktion f är $V_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$, eller informellt i ord "alla värden som funktionen kan ge".

Vilka är värdemängderna för funktionerna nedan?

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = x^2 \;\Rightarrow\; V_f = [0, \infty[$.

$h : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ där $h(x) = x^2 \;\Rightarrow\; V_h = [0, 4]$.

Värdemängd

Definition

Värdemängden för en funktion f är $V_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$, eller informellt i ord ”alla värden som funktionen kan ge”.

Vilka är värdemängderna för funktionerna nedan?

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = x^2 \;\Rightarrow\; V_f = [0, \infty[$.

$h : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ där $h(x) = x^2 \;\Rightarrow\; V_h = [0, 4]$.

g : {🍏, 🍌, 🍊} → {🍏, 🍌, 🍊}, där g(🍏) = 🍌, g(🍌) = 🍏, g(🍊) = 🍌

Värdemängd

Definition

Värdemängden för en funktion f är $V_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$, eller informellt i ord ”alla värden som funktionen kan ge”.

Vilka är värdemängderna för funktionerna nedan?

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = x^2 \;\Rightarrow\; V_f = [0, \infty[$.

$h : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ där $h(x) = x^2 \;\Rightarrow\; V_h = [0, 4]$.

$g : \{$🍏, 🍌, 🍊$\} \to \{$🍏, 🍌, 🍊$\}$, där $g($🍏$) =$ 🍌, $g($🍌$) =$ 🍏, $g($🍊$) =$ 🍌

$\Rightarrow V_g = \{$🍏, 🍌$\}$

Exempel

Uppgift

Ange värdemängden till $f(x) = 3 + \frac{1}{x-2}$

Exempel

Uppgift

Ange värdemängden till $f(x) = 3 + \frac{1}{x-2}$

Vi noterar att $x \neq 2$. Vi sätter $y = f(x)$, alltså

$$\begin{aligned}
&\quad y = 3 + \tfrac{1}{x-2} \\
&\Leftrightarrow y - 3 = \tfrac{1}{x-2} \\
&\Leftrightarrow \tfrac{1}{y-3} = x - 2 \text{ och } y \neq 3 \\
&\Leftrightarrow x = 2 + \tfrac{1}{y-3} \text{ och } y \neq 3
\end{aligned}$$

Så för alla y utom 3 så finns det ett x så att $f(x) = y$

Slutsats: $V_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Sammansättning

Uppgift

Låt $f(x) = x^2$ och $g(x) = x + 1$. Beräkna $f(g(x))$ och $g(f(x))$.

Sammansättning

Uppgift

Låt $f(x) = x^2$ och $g(x) = x + 1$. Beräkna $f(g(x))$ och $g(f(x))$.

$f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$
$g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$
Notera att resultaten blir olika, ordningen spelar roll.

Sammansättning

Uppgift

Låt $f(x) = x^2$ och $g(x) = x + 1$. Beräkna $f(g(x))$ och $g(f(x))$.

$f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$
$g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$
Notera att resultaten blir olika, ordningen spelar roll.

Definition

Av $f(x)$ och $g(x)$ kan vi bilda deras **sammansättning** $f \circ g$, denna nya funktion är definierad som $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Sammansättning

Uppgift

Låt $f(x) = x^2$ och $g(x) = x + 1$. Beräkna $f(g(x))$ och $g(f(x))$.

$f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
$g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$
Notera att resultaten blir olika, ordningen spelar roll.

Definition

Av $f(x)$ och $g(x)$ kan vi bilda deras **sammansättning** $f \circ g$, denna nya funktion är definierad som $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Observera att för att $f \circ g$ ska få en icketom definitionsmängd krävs att V_g ligger i (eller åtminstone skär) D_f.

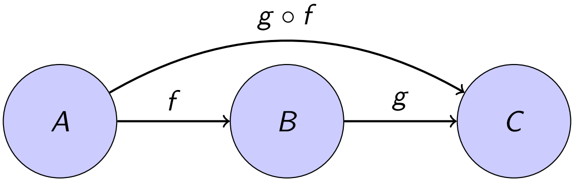
Visualisering av sammansättning

Antag att $f : A \to B$ och $g : B \to C$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

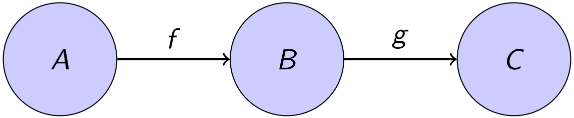
Visualisering av sammansättning

Antag att $f : A \to B$ och $g : B \to C$. Då får vi $g \circ f : A \to C$.



Visualisering av sammansättning

Antag att $f : A \to B$ och $g : B \to C$.



Egentligen räcker det att V_f ligger innuti D_g för att $g \circ f$ ska bli en funktion från A till C. Om delar av V_f ligger utanför D_g minskar den sammansatta funktionens naturliga definitionsmängd.

Del II

Invers

Intuition

Inversen till en funktion f är en funktion som gör motsatsen till vad f gör.

Låt $f : \{$🍏, 🍌, 🍊$\} \to \{$🐇, 🕷, 🐍$\}$

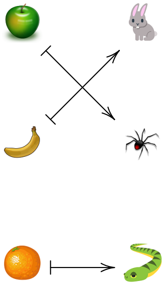
där $f($🍏$) =$ 🕷, $\quad f($🍌$) =$ 🐇, $\quad f($🍊$) =$ 🐍.

Intuition

Inversen till en funktion f är en funktion som gör motsatsen till vad f gör.

Låt f : {🍏, 🍌, 🍊} → {🐇, 🕷, 🐍}

där f(🍏) = 🕷, f(🍌) = 🐇, f(🍊) = 🐍.

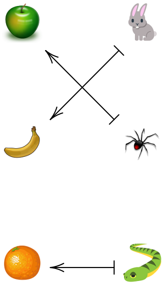


Intuition

Inversen till en funktion f är en funktion som gör motsatsen till vad f gör.

Låt f : {🍏, 🍌, 🍊} → {🐇, 🕷, 🐍}

där f(🍏) = 🕷, f(🍌) = 🐇, f(🍊) = 🐍.



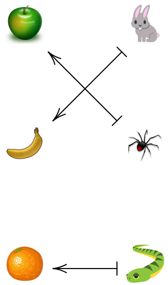
Då är inversen till f funktionen g : {🐇, 🕷, 🐍} → {🍏, 🍌, 🍊}

där g(🐇) = 🍌, g(🕷) = 🍏, g(🐍) = 🍊.

Intuition

Inversen till en funktion f är en funktion som gör motsatsen till vad f gör.

Låt $f : \{🍏, 🍌, 🍊\} \to \{🐇, 🕷, 🐍\}$
där $f(🍏) = 🕷$, $\quad f(🍌) = 🐇$, $\quad f(🍊) = 🐍$.



Då är inversen till f funktionen $g : \{🐇, 🕷, 🐍\} \to \{🍏, 🍌, 🍊\}$
där $g(🐇) = 🍌$, $\quad g(🕷) = 🍏$, $\quad g(🐍) = 🍊$. Notera att $g(f(x)) = x = f(g(x))$.

Inverterbarhet

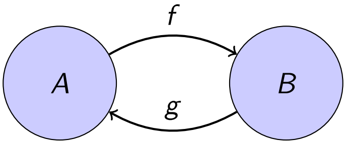
Definition

Inversen till en funktion $f : A \to B$ är en funktion $g : B \to A$ som uppfyller $g(f(a)) = a$ för alla a i A, och omvänt $g(f(b)) = b$ för alla b i B. Om en sådan funktion g existerar, så säger vi att f är inverterbar och vi skriver $g = f^{-1}$.

Inverterbarhet

Definition

Inversen till en funktion $f : A \to B$ är en funktion $g : B \to A$ som uppfyller $g(f(a)) = a$ för alla a i A, och omvänt $g(f(b)) = b$ för alla b i B. Om en sådan funktion g existerar, så säger vi att f är inverterbar och vi skriver $g = f^{-1}$.



Inverterbarhet

Definition

Inversen till en funktion $f : A \to B$ är en funktion $g : B \to A$ som uppfyller $g(f(a)) = a$ för alla a i A, och omvänt $g(f(b)) = b$ för alla b i B. Om en sådan funktion g existerar, så säger vi att f är inverterbar och vi skriver $g = f^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Obs!

$f^{-1}(x)$ betyder **inte** $\frac{1}{f(x)}$

Exempel

Uppgift

Hitta inversen till $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.

Exempel

Uppgift

Hitta inversen till $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.

Om f^{-1} är invers till f, och vi inför $y = f(x)$, så är $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$, så om vi från funktionsuttryket kan lösa ut x så har vi hittat en invers.
För $x \neq -1$ har vi
$y = \frac{2x-3}{x+1} \Leftrightarrow y(x+1) = 2x - 3 \Leftrightarrow yx - 2x = -y - 3 \Leftrightarrow x(y-2) = -y - 3 \Leftrightarrow x = \frac{-y-3}{y-2}$
och $y \neq 2$, så $x = f^{-1}(y) = \frac{-y-3}{y-2}$. Här spelar det ingen roll vad variabeln kallas, vi kan lika gärna skriva $f^{-1}(x) = \frac{-x-3}{x-2}$, det är ju samma *regel*.

Exempel

Uppgift

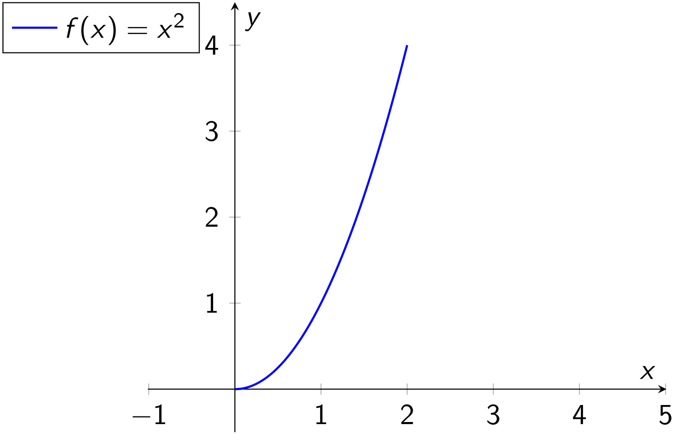
Hitta inversen till $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.

Om f^{-1} är invers till f, och vi inför $y = f(x)$, så är $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$, så om vi från funktionsuttryket kan lösa ut x så har vi hittat en invers.
För $x \neq -1$ har vi
$y = \frac{2x-3}{x+1} \Leftrightarrow y(x+1) = 2x-3 \Leftrightarrow yx - 2x = -y-3 \Leftrightarrow x(y-2) = -y-3 \Leftrightarrow x = \frac{-y-3}{y-2}$
och $y \neq 2$, så $x = f^{-1}(y) = \frac{-y-3}{y-2}$. Här spelar det ingen roll vad variabeln kallas, vi kan lika gärna skriva $f^{-1}(x) = \frac{-x-3}{x-2}$, det är ju samma *regel*.

Notera att $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = V_{f^{-1}}$ och $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\} = V_f$

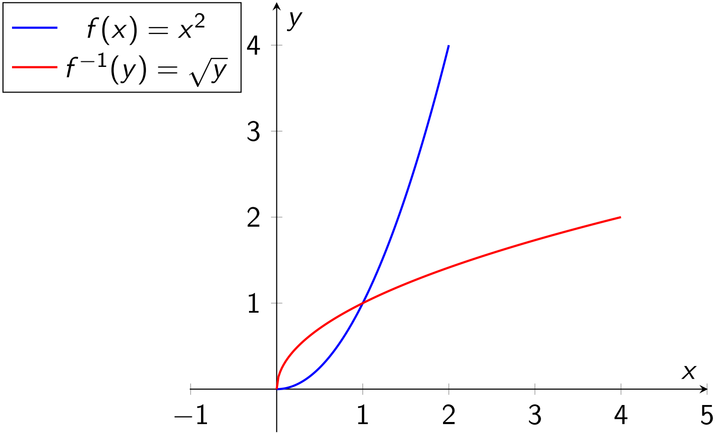
Grafen för en funktion och dess invers

Låt $f(x) = x^2$ med $D_f = [0, 2]$



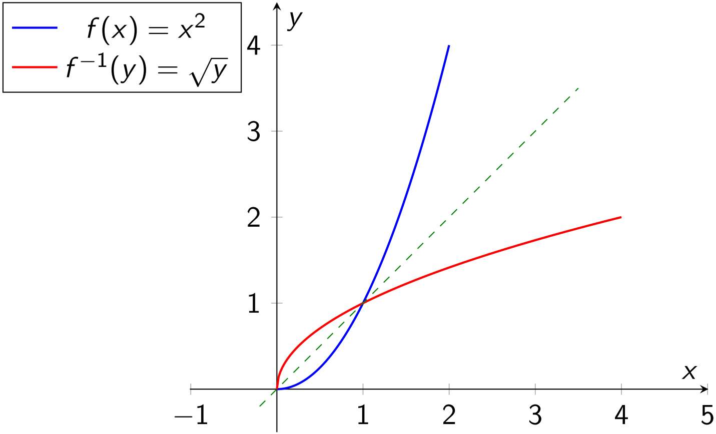
Grafen för en funktion och dess invers

Låt $f(x) = x^2$ med $D_f = [0, 2]$, då är $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ med $D_{f^{-1}} = [0, 4]$.



Grafen för en funktion och dess invers

Låt $f(x) = x^2$ med $D_f = [0, 2]$, då är $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ med $D_{f^{-1}} = [0, 4]$.

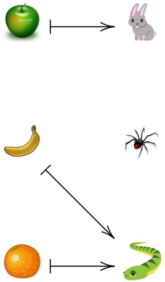


Vilka funktioner har invers?

Låt $f : \{$🍏, 🍌, 🍊$\} \to \{$🐇, 🕷, 🐍$\}$
där $f($🍏$) =$ 🐇, $f($🍌$) =$ 🐍, $f($🍊$) =$ 🐍.

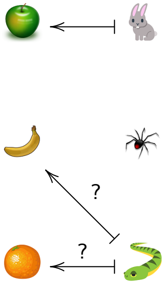
Vilka funktioner har invers?

Låt f : {🍏, 🍌, 🍊} → {🐇, 🕷, 🐍}
där f(🍏) = 🐇, f(🍌) = 🐍, f(🍊) = 🐍.



Vilka funktioner har invers?

Låt f : {🍏, 🍌, 🍊} $\to$ {🐇, 🕷, 🐍}
där f(🍏) = 🐇, f(🍌) = 🐍, f(🍊) = 🐍.



Om g : {🐇, 🕷, 🐍} $\to$ {🍏, 🍌, 🍊} skulle vara en invers till f så måste
där g(🐍) = 🍌, och g(🐍) = 🍊, detta är inte möjligt.

Vilka funktioner har invers?

Är funktionen $f(x) = x^2$ med $D_f = \mathbb{R}$ inverterbar?

Vilka funktioner har invers?

Är funktionen $f(x) = x^2$ med $D_f = \mathbb{R}$ inverterbar?

Nej - antag att det finns en invers g. Vi måste då ha $g(f(2)) = 2$ och $g(f(-2)) = -2$ alltså både $g(4) = 2$ och $g(4) = -2$, men en funktion kan inte ge flera värden för samma input, så ingen sådan g finns.
Problemet är alltså att det "finns flera x-värden för samma y-värde".

Injektivitet

Definition

En funktion f kallas **injektiv** eller **omvändbar** om $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Med ord, "$f$ skickar olika till olika".

Injektivitet

Definition

En funktion f kallas **injektiv** eller **omvändbar** om $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Med ord, "$f$ skickar olika till olika".

Exempel: Funktionen $f(x) = x^2$ med $D_f = \mathbb{R}$ är *inte injektiv* eftersom exempelvis $f(-2) = f(2)$.

Injektivitet

Definition

En funktion f kallas **injektiv** eller **omvändbar** om $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Med ord, "$f$ skickar olika till olika".

Exempel: Funktionen $f(x) = x^2$ med $D_f = \mathbb{R}$ är *inte injektiv* eftersom exempelvis $f(-2) = f(2)$.
Men $g(x) = x^2$ där $D_g = [0, 2]$ *är injektiv*: olika tal i definitionsmängden avbildas till olika tal.

Injektivitet

Definition

En funktion f kallas **injektiv** eller **omvändbar** om $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Med ord, "$f$ skickar olika till olika".

Exempel: Funktionen $f(x) = x^2$ med $D_f = \mathbb{R}$ är *inte injektiv* eftersom exempelvis $f(-2) = f(2)$.
Men $g(x) = x^2$ där $D_g = [0, 2]$ *är injektiv*: olika tal i definitionsmängden avbildas till olika tal.

Sats

Antag att $f : A \to B$ är en funktion, där $B = V_f$. Då är f inverterbar om och endast om f är injektiv.

Del III

Växande och avtagande

Växande funktioner

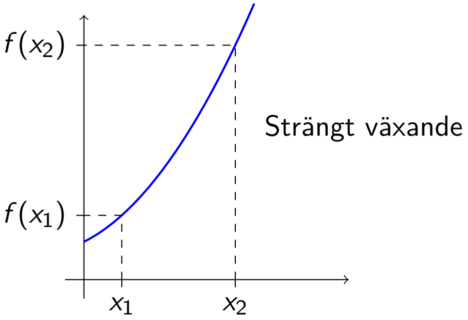
Definition

En funktion f kallas **växande** om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.
f kallas **strängt växande** om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.
I ord: ”större invärde ger större utvärde”.

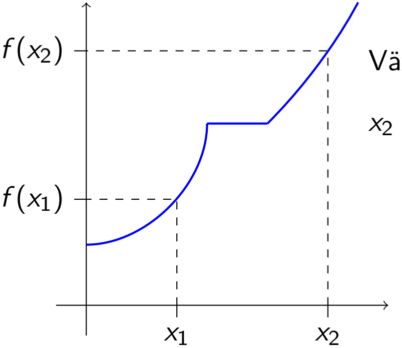
Växande funktioner

Definition

En funktion f kallas **växande** om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.
f kallas **strängt växande** om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.
I ord: "större invärde ger större utvärde".



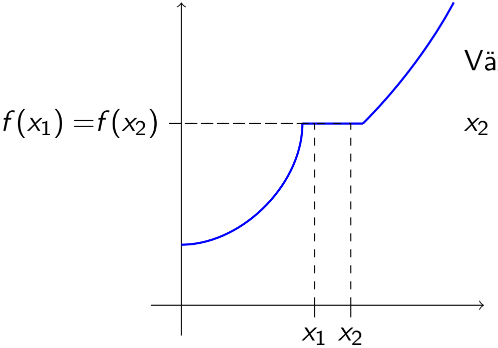
Exempel



Växande, men inte strängt växande

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

Exempel



Växande, men inte strängt växande

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

Avtagande funktioner

Definition

En funktion f kallas **avtagande** om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$.
f kallas **strängt avtagande** om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.
I ord: ”större invärde ger mindre utvärde”.

Avtagande funktioner

Definition

En funktion f kallas **avtagande** om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$.
f kallas **strängt avtagande** om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.
I ord: ”större invärde ger mindre utvärde”.

Monotonitet

En funktion som antingen är växande eller avtagande kallas **monoton**.
En funktion som antingen är strängt växande eller strängt avtagande kallas **strängt monoton**.

Strängt monotona funktioner är injektiva, och har därför invers.

Avtagande funktioner

Definition

En funktion f kallas **avtagande** om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$.
f kallas **strängt avtagande** om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.
I ord: ”större invärde ger mindre utvärde”.

Monotonitet

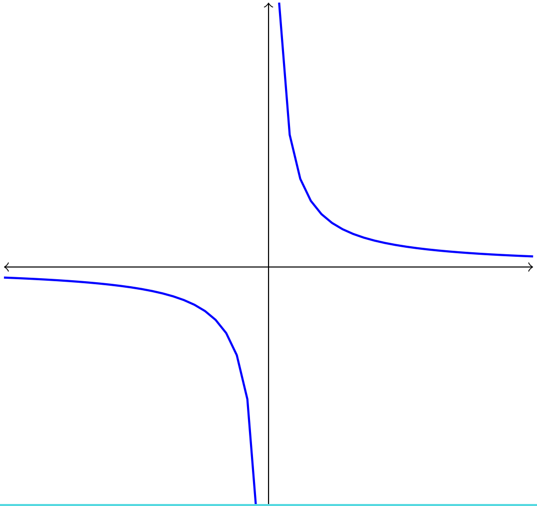
En funktion som antingen är växande eller avtagande kallas **monoton**.
En funktion som antingen är strängt växande eller strängt avtagande kallas **strängt monoton**.

Strängt monotona funktioner är injektiva, och har därför invers.

Även om en funktion inte är växande/avtagende/monoton så kan man ändå säga att den har en viss egenskap *på ett intervall.*
Exempel: $f(x) = x^2$ är strängt växande för $x \geq 0$ och strängt avtagande för $x \leq 0$.

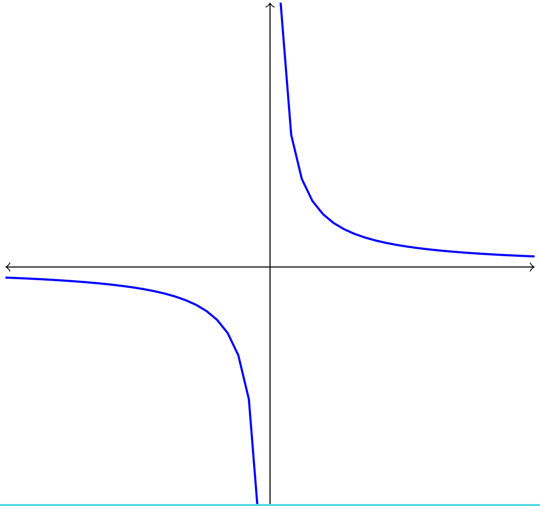
Exempel

Är $f(x) = \frac{1}{x}$ växande eller avtagande?



Exempel

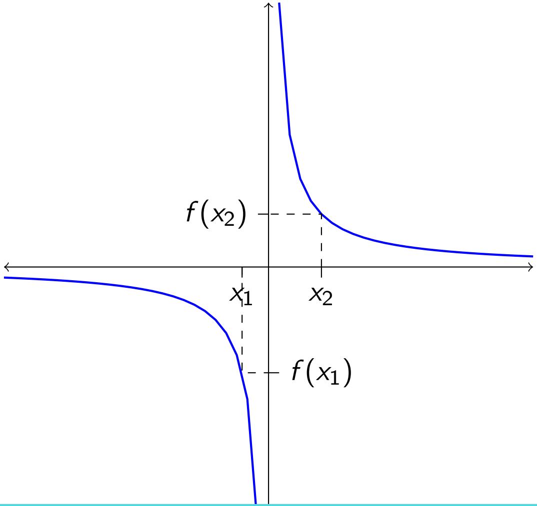
Är $f(x) = \frac{1}{x}$ växande eller avtagande?



f är strängt avtagande för $x > 0$,
f är strängt avtagande för $x < 0$

Exempel

Är $f(x) = \frac{1}{x}$ växande eller avtagande?



f är strängt avtagande för $x > 0$,
f är strängt avtagande för $x < 0$,
men f är ej avtagande. **Svar: Nej!**

Räkning med monotonitet

Sats

Antag att $f(x)$ och $g(x)$ båda är växande. Då gäller:

- $f(x) + g(x)$ är växande
- $f(g(x))$ är växande
- $-f(x)$ är avtagande
- $f(-x)$ är avtagande

Räkning med monotonitet

Sats

Antag att $f(x)$ och $g(x)$ båda är växande. Då gäller:

- $f(x) + g(x)$ är växande
- $f(g(x))$ är växande
- $-f(x)$ är avtagande
- $f(-x)$ är avtagande

Det finns en analog sats för avtagande funktioner, det finns också versioner för strängt växande/avtatgande - man får resonera sig fram.

Exempel

Uppgift

Vilka av följande funktioner är (strängt) växande/avtagande/monotona?

- $f(x) = \sqrt{x}$
- $g(x) = 1 + \frac{5}{x-3}$ med $D_g = [5, 8]$
- $h(x) = x + |x|$

Exempel

Uppgift

Vilka av följande funktioner är (strängt) växande/avtagande/monotona?

- $f(x) = \sqrt{x}$
- $g(x) = 1 + \frac{5}{x-3}$ med $D_g = [5, 8]$
- $h(x) = x + |x|$

Svar:

- f är strängt växande (vi har $f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x1}} > 0$ då $x_2 > x1$)
- g är strängt avtagande, eftersom $k(x) = \frac{1}{x}$ är avtagande för $x > 0$, och $f(x) = 1 + 5 \cdot k(x - 3)$.
- $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x \leq 0 \\ 2x & \text{för } x \leq 0 \end{cases}$

Exempel

Uppgift

Låt $f(x) = x + \sqrt{x}$. Är f inverterbar? Vad blir $f^{-1}(6)$?

Exempel

Uppgift

Låt $f(x) = x + \sqrt{x}$. Är f inverterbar? Vad blir $f^{-1}(6)$?

Svar: $f(x)$ är summan av två växande funktioner, så den är växande.
Det är svårt att ta fram ett explicit uttryck för inversen, men eftersom $f(f^{-1}(x)) = x$ ska gälla så måste $f(f^{-1}(6)) = 6$, så $f^{-1}(6)$ måste vara 4.

Del IV

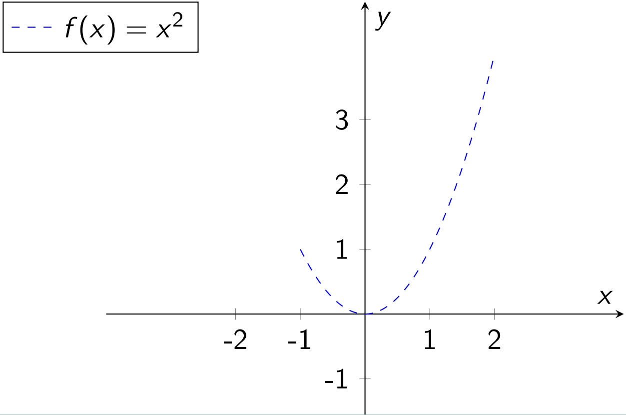
Kurvritning

Uppgift

Låt $f(x) = x^2$ med $D_f = [-1, 2]$. Skissa var och en av graferna till $f(x), g_1(x) = -f(x)$, $g_2(x) = f(-x)$, $g_3(x) = f(x) - 1$, $g_4(x) = f(x-1)$, $g_5(x) = f(2x)$, $g_5(x) = |f(x) - 1|$.

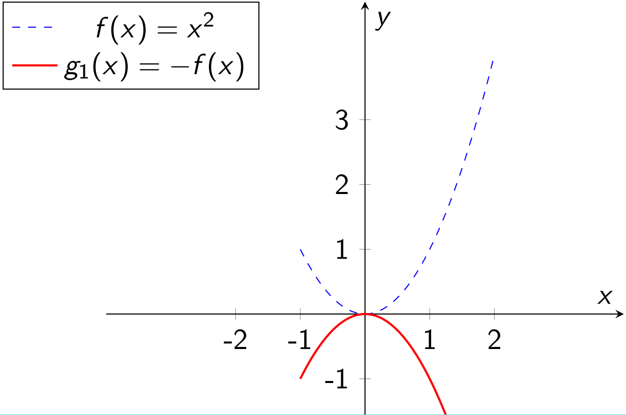
Uppgift

Låt $f(x) = x^2$ med $D_f = [-1, 2]$. Skissa var och en av graferna till $f(x), g_1(x) = -f(x)$, $g_2(x) = f(-x)$, $g_3(x) = f(x) - 1$, $g_4(x) = f(x-1)$, $g_5(x) = f(2x)$, $g_5(x) = |f(x) - 1|$.



Uppgift

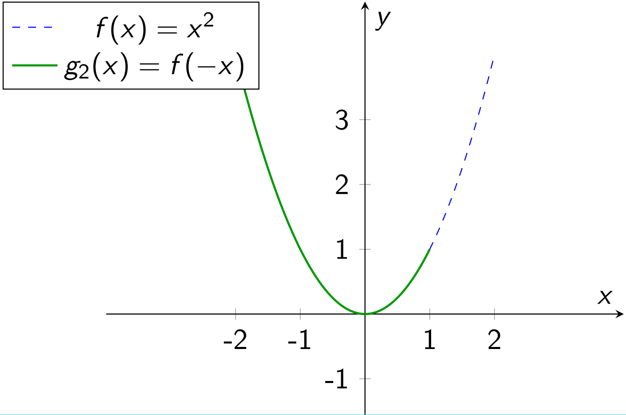
Låt $f(x) = x^2$ med $D_f = [-1, 2]$. Skissa var och en av graferna till $f(x), g_1(x) = -f(x)$, $g_2(x) = f(-x)$, $g_3(x) = f(x) - 1$, $g_4(x) = f(x-1)$, $g_5(x) = f(2x)$, $g_5(x) = |f(x) - 1|$.



Kurvritning

Uppgift

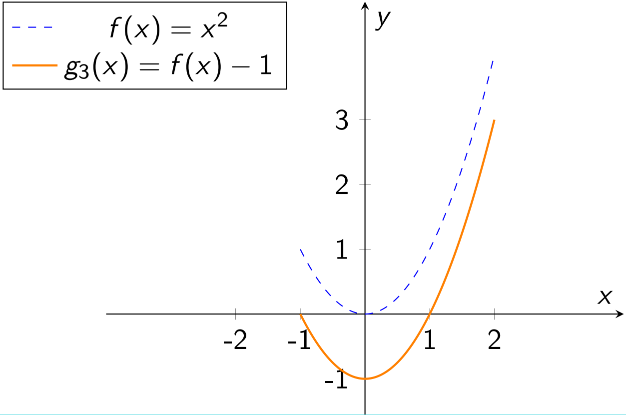
Låt $f(x) = x^2$ med $D_f = [-1, 2]$. Skissa var och en av graferna till $f(x), g_1(x) = -f(x)$, $g_2(x) = f(-x)$, $g_3(x) = f(x) - 1$, $g_4(x) = f(x-1)$, $g_5(x) = f(2x)$, $g_5(x) = |f(x) - 1|$.



Kurvritning

Uppgift

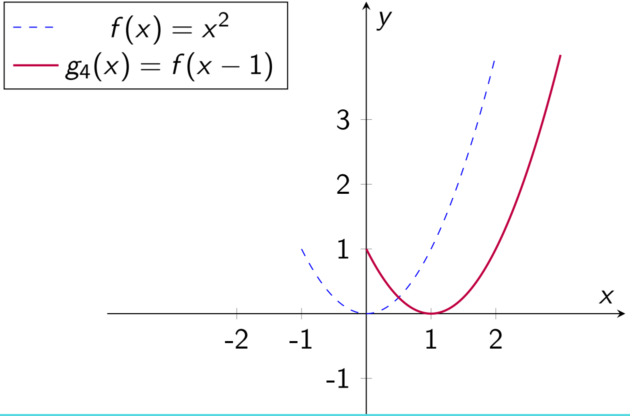
Låt $f(x) = x^2$ med $D_f = [-1, 2]$. Skissa var och en av graferna till $f(x), g_1(x) = -f(x)$, $g_2(x) = f(-x)$, $g_3(x) = f(x) - 1$, $g_4(x) = f(x-1)$, $g_5(x) = f(2x)$, $g_5(x) = |f(x) - 1|$.



Kurvritning

Uppgift

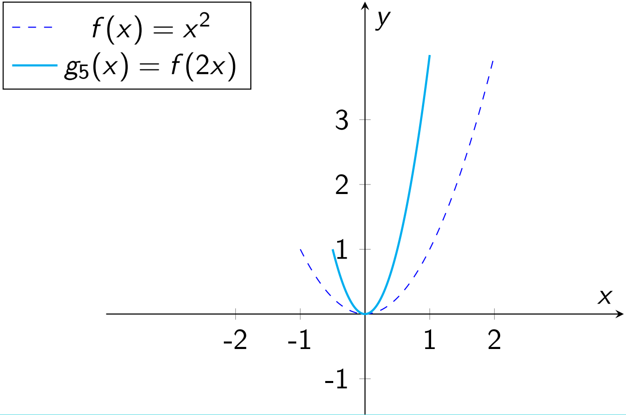
Låt $f(x) = x^2$ med $D_f = [-1, 2]$. Skissa var och en av graferna till $f(x), g_1(x) = -f(x)$, $g_2(x) = f(-x)$, $g_3(x) = f(x) - 1$, $g_4(x) = f(x-1)$, $g_5(x) = f(2x)$, $g_5(x) = |f(x) - 1|$.



Kurvritning

Uppgift

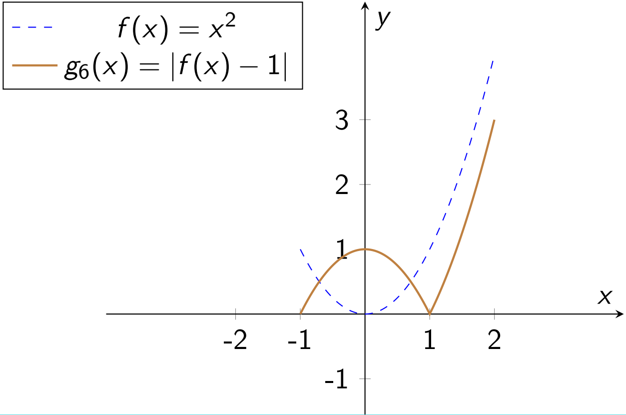
Låt $f(x) = x^2$ med $D_f = [-1, 2]$. Skissa var och en av graferna till $f(x), g_1(x) = -f(x)$, $g_2(x) = f(-x)$, $g_3(x) = f(x) - 1$, $g_4(x) = f(x-1)$, $g_5(x) = f(2x)$, $g_5(x) = |f(x) - 1|$.



Kurvritning

Uppgift

Låt $f(x) = x^2$ med $D_f = [-1, 2]$. Skissa var och en av graferna till $f(x), g_1(x) = -f(x)$, $g_2(x) = f(-x)$, $g_3(x) = f(x) - 1$, $g_4(x) = f(x-1)$, $g_5(x) = f(2x)$, $g_5(x) = |f(x) - 1|$.



Kurvritning

Uppgift

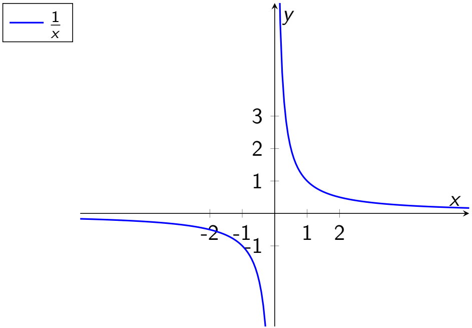
Rita grafen till $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

Kurvritning

Uppgift

Rita grafen till $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

Med polynomdivision får vi $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$.

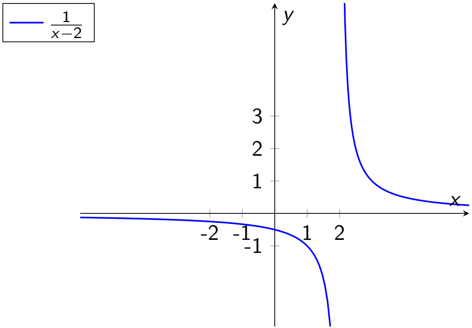


Kurvritning

Uppgift

Rita grafen till $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

Med polynomdivision får vi $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$.

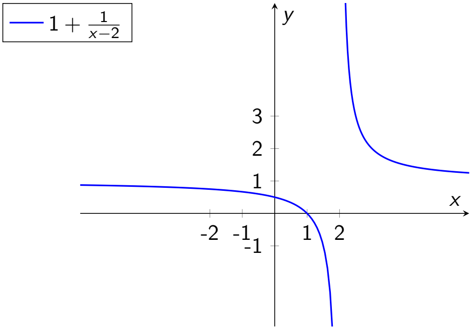


Kurvritning

Uppgift

Rita grafen till $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

Med polynomdivision får vi $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$.



Tack för idag!