Grunk Föreläsning 6

Exponentialfunktioner och logaritmer

Jonathan Nilsson

Linköpings Universitet

Idag

- Exponentialfunktioner
- Logaritmer
- Potensfunktioner

Del I

Definition av potenser

Potenser

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

Potenser

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

Hur definieras a^x när x inte är ett naturligt tal?

Räknelagar

Om exponenterna är positiva heltal så har vi

$$a^x \cdot a^y = (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{x}}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{y}}) = (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{x+y}}) = a^{x+y}$$

Räknelagar

Om exponenterna är positiva heltal så har vi

$$a^x \cdot a^y = (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{x}}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{y}}) = (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{x+y}}) = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{x}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{y}} = a^{x-y}$$

Räknelagar

Om exponenterna är positiva heltal så har vi

$$a^x \cdot a^y = (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{x}}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{y}}) = (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{x+y}}) = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{x}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{y}} = a^{x-y}$$

Räknelagar

Om exponenterna är positiva heltal så har vi

$$a^x \cdot a^y = (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{x}}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{y}}) = (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{x+y}}) = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{x}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{y}} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = \underbrace{(\underbrace{a \cdots a}_{x}) \cdot (\underbrace{a \cdots a}_{x}) \cdots (\underbrace{a \cdots a}_{x})}_{y} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{x \cdot y} = a^{xy}$$

Utvidgning till icke-heltal

Idé: Definiera a^x för alla reella x så att samma räkneregler fortfarande gäller.

Utvidgning till icke-heltal

Idé: Definiera a^x för alla reella x så att samma räkneregler fortfarande gäller. Låt $a > 0$ och $m, n \in \mathbb{N}$.

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0, \text{ så vi måste ta } a^0 = 1.$$

Utvidgning till icke-heltal

Idé: Definiera a^x för alla reella x så att samma räkneregler fortfarande gäller. Låt $a > 0$ och $m, n \in \mathbb{N}$.

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0, \text{ så vi måste ta } a^0 = 1.$$

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1 \text{ så } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Utvidgning till icke-heltal

Idé: Definiera a^x för alla reella x så att samma räkneregler fortfarande gäller. Låt $a > 0$ och $m, n \in \mathbb{N}$.

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0, \text{ så vi måste ta } a^0 = 1.$$

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1 \text{ så } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a, \text{ så } a^{\frac{1}{n}} \text{ är } n\text{-te roten av } a, \; a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Utvidgning till icke-heltal

Idé: Definiera a^x för alla reella x så att samma räkneregler fortfarande gäller. Låt $a > 0$ och $m, n \in \mathbb{N}$.

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0, \text{ så vi måste ta } a^0 = 1.$$

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1 \text{ så } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a, \text{ så } a^{\frac{1}{n}} \text{ är } n\text{-te roten av } a,\ a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

$$\text{Och för alla bråk } \frac{m}{n} \text{ så ska vi ha } a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Utvidgning till icke-heltal

Idé: Definiera a^x för alla reella x så att samma räkneregler fortfarande gäller. Låt $a > 0$ och $m, n \in \mathbb{N}$.

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0, \text{ så vi måste ta } a^0 = 1.$$

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1 \text{ så } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a, \text{ så } a^{\frac{1}{n}} \text{ är } n\text{-te roten av } a,\ a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

$$\text{Och för alla bråk } \frac{m}{n} \text{ så ska vi ha } a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Detta kan sedan utvidgas till a^x för alla reella x
(Det finns bråktal ”oändligt nära” varje reellt tal x)

Utvidgning till icke-heltal

Idé: Definiera a^x för alla reella x så att samma räkneregler fortfarande gäller. Låt $a > 0$ och $m, n \in \mathbb{N}$.

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0, \text{ så vi måste ta } a^0 = 1.$$

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1 \text{ så } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a, \text{ så } a^{\frac{1}{n}} \text{ är } n\text{-te roten av } a,\ a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

$$\text{Och för alla bråk } \tfrac{m}{n} \text{ så ska vi ha } a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Detta kan sedan utvidgas till a^x för alla reella x
(Det finns bråktal "oändligt nära" varje reellt tal x)

Senare i kursen ska vi även visa hur detta kan utvidgas till komplexa x.

Räknelagar för potenser

Samma bas

För alla $x, y \in \mathbb{R}$ och för alla $a > 0$ gäller

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^0 = 1$

Samma exponent

För alla $a, b > 0$ och $x \in \mathbb{R}$ gäller

- $(ab)^x = a^x b^x$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Räknelagar för potenser

Samma bas

För alla $x, y \in \mathbb{R}$ och för alla $a > 0$ gäller

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^0 = 1$

Samma exponent

För alla $a, b > 0$ och $x \in \mathbb{R}$ gäller

- $(ab)^x = a^x b^x$
- $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

Obs!

Notera att $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$, exempelvis är $256 = 2^{(2^3)} \neq (2^2)^3 = 2^6 = 64$.
a^{x^2} ska tolkas som $a^{(x^2)}$ om parenteser ej skrivs ut.

Del II

Exponentialfunktioner

Exempel

Definition

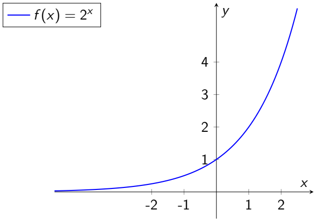
En funktion på formen $f(x) = a^x$ där $a > 0$, $a \neq 1$ kallas för en **exponentialfunktion**. Talet a kallas för **basen** för exponentialfunktionen.

Exempel

Definition

En funktion på formen $f(x) = a^x$ där $a > 0$, $a \neq 1$ kallas för en **exponentialfunktion**. Talet a kallas för **basen** för exponentialfunktionen.

Exempel: $f(x) = 2^x$



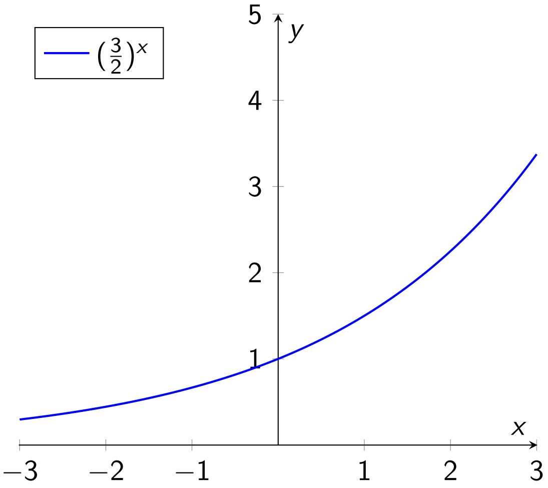
Vi har t.ex. $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$, och $f(-1) = \frac{1}{2}$.

Observationer

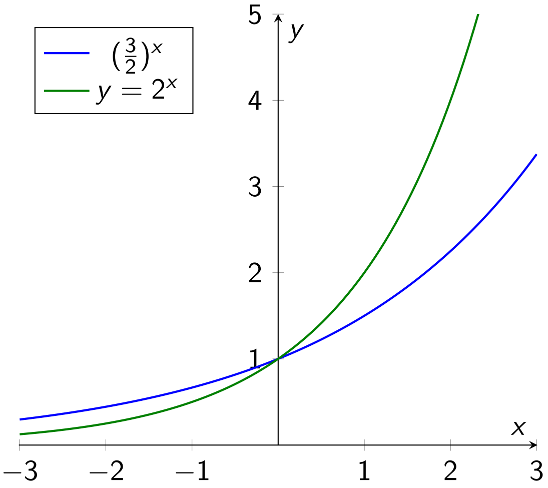
Betrakta $f(x) = a^x$, och antag att $a > 0$

- $f(x)$ är strängt växande om $a > 1$ och strängt avtagande om $a < 1$.
- $a^{x+1} = a \cdot a^x$, så för varje ökning av x med 1 multipliceras funktionsvärdet med basen
- $D_f = \mathbb{R}$ och $V_f =]0, \infty[$
- Då $a > 1$: $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$, och $f(x) \to 0$ då $x \to -\infty$

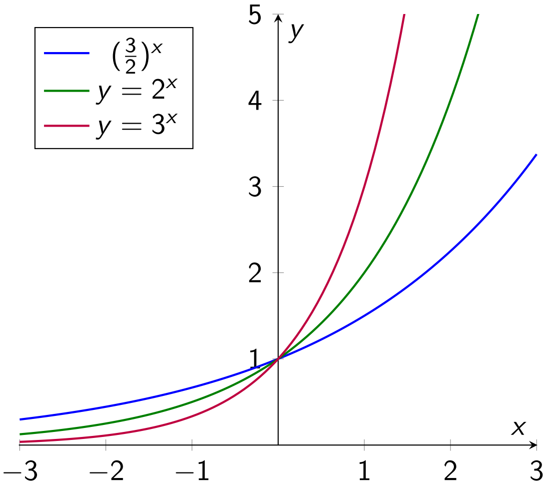
Exponentialfunktioner med olika bas



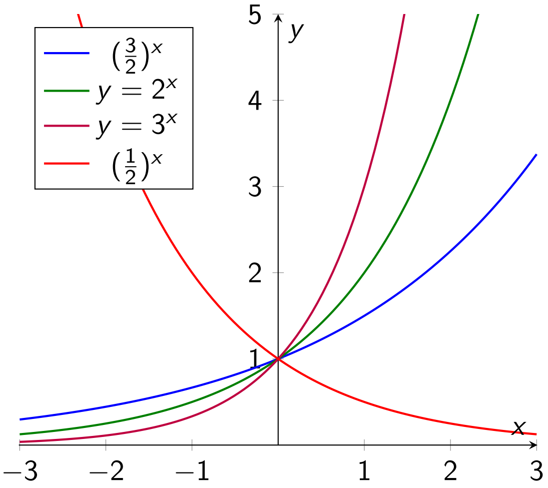
Exponentialfunktioner med olika bas



Exponentialfunktioner med olika bas

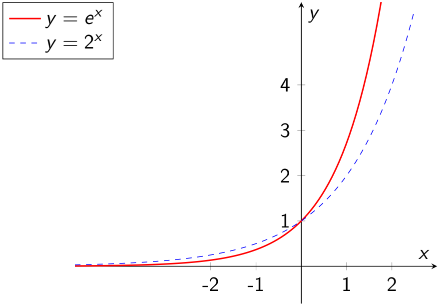


Exponentialfunktioner med olika bas



Basen e

Ett naturligt val av bas är talet $e = 2.71828\ldots$



Med $f(x) = e^x$ har vi $f(0) = 1$, $f(1) = e$, $f(2) = e^2 \simeq 7.4$, $f(-1) = \frac{1}{e} \simeq 0.37$

Logaritmer

$f(x) = e^x$ är strängt växande, så den har en invers.

Logaritmer

$f(x) = e^x$ är strängt växande, så den har en invers.

Definition

Inversen till $f(x) = e^x$ kallas den **naturliga logaritmen** och skrivs $g(x) = \ln(x)$.

Logaritmer

$f(x) = e^x$ är strängt växande, så den har en invers.

Definition

Inversen till $f(x) = e^x$ kallas den **naturliga logaritmen** och skrivs $g(x) = \ln(x)$.

Intuitivt: $\ln(x)$ är alltså *det tal som e ska upphöjas till för att ge x*

Logaritmer

$f(x) = e^x$ är strängt växande, så den har en invers.

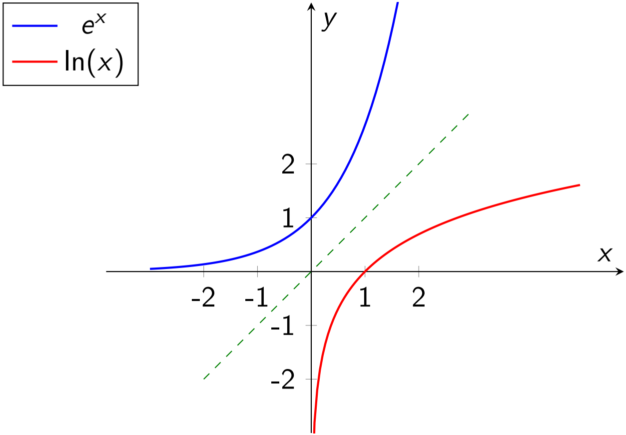
Definition

Inversen till $f(x) = e^x$ kallas den **naturliga logaritmen** och skrivs $g(x) = \ln(x)$.

Intuitivt: $\ln(x)$ är alltså *det tal som e ska upphöjas till för att ge x*

- $\ln(x)$ är endast definierad för $x > 0$
- Värdemängden för $\ln(x)$ är hela $\mathbb{R}$
- Vi har $e^{\ln(x)} = x$ för alla $x > 0$ och $\ln(e^x) = x$ för alla x
- $e^0 = 1$, så $\ln(1) = 0$
- $\ln(x) \to \infty$ då $x \to \infty$, och $\ln(x) \to -\infty$ då $x \to 0^+$
- $\ln(2) \simeq 0.7$ och $\ln(3) \simeq 1.1$
- Det är vanligt att man skippar parentesen och skriver t.ex. $\ln 2$. Notera dock att t.ex. $\ln x^2 \neq \ln(x)^2$.

e^x och dess invers $\ln(x)$

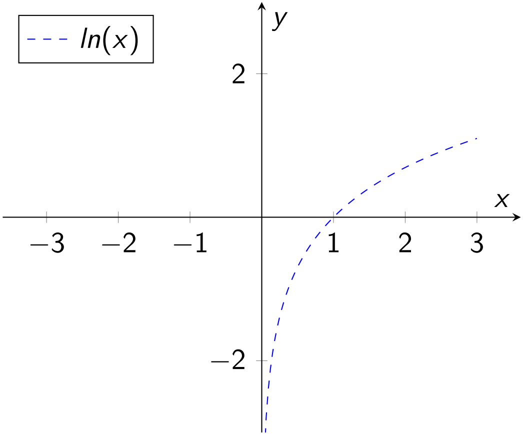


Uppgift

Rita graferna till $f_1(x) = \ln(x)$, $f_2(x) = -\ln(x)$, $f_3(x) = 2\ln(x)$, $f_4(x) = |\ln(x)|$, $f_5(x) = \ln|x|$

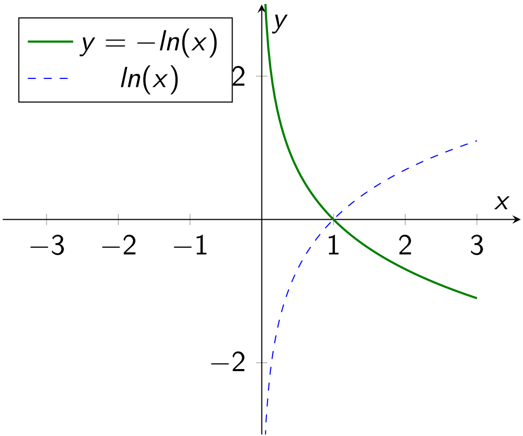
Uppgift

Rita graferna till $f_1(x) = \ln(x)$, $f_2(x) = -\ln(x)$, $f_3(x) = 2\ln(x)$, $f_4(x) = |\ln(x)|$, $f_5(x) = \ln|x|$



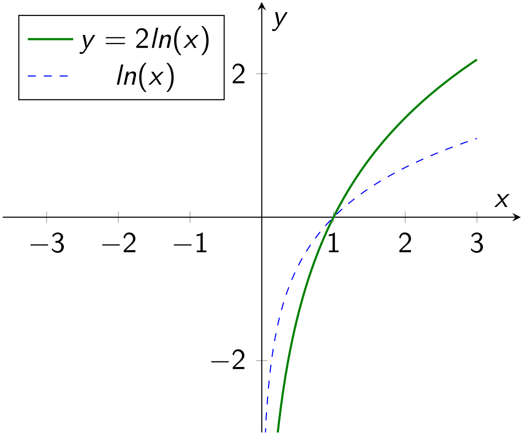
Uppgift

Rita graferna till $f_1(x) = \ln(x)$, $f_2(x) = -\ln(x)$, $f_3(x) = 2\ln(x)$, $f_4(x) = |\ln(x)|$, $f_5(x) = \ln|x|$



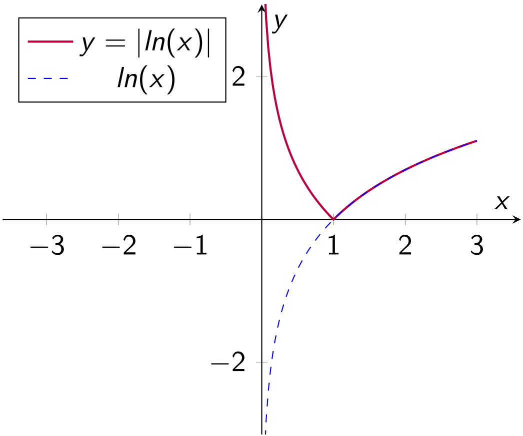
Uppgift

Rita graferna till $f_1(x) = \ln(x)$, $f_2(x) = -\ln(x)$, $f_3(x) = 2\ln(x)$, $f_4(x) = |\ln(x)|$, $f_5(x) = \ln|x|$



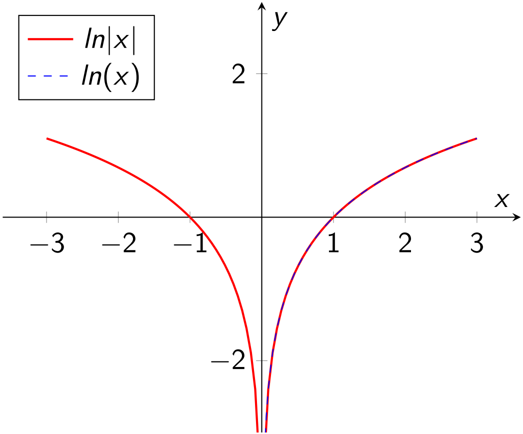
Uppgift

Rita graferna till $f_1(x) = \ln(x)$, $f_2(x) = -\ln(x)$, $f_3(x) = 2\ln(x)$, $f_4(x) = |\ln(x)|$, $f_5(x) = \ln|x|$



Uppgift

Rita graferna till $f_1(x) = \ln(x)$, $f_2(x) = -\ln(x)$, $f_3(x) = 2\ln(x)$, $f_4(x) = |\ln(x)|$, $f_5(x) = \ln|x|$



Räknelagar för logaritmen

Räknelagar

Antag att $x > 0$ och $y > 0$ och $a \in \mathbb{R}$. Då har vi

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^a) = a\ln(x)$

Räknelagar för logaritmen

Räknelagar

Antag att $x > 0$ och $y > 0$ och $a \in \mathbb{R}$. Då har vi

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^a) = a\ln(x)$

Specialfall värda att minnas:

- $\ln(\frac{1}{x}) = \ln(1) - \ln(x) = -\ln(x)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

Räknelagar för logaritmen

Räknelagar

Antag att $x > 0$ och $y > 0$ och $a \in \mathbb{R}$. Då har vi

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^a) = a \ln(x)$

Specialfall värda att minnas:

- $\ln(\frac{1}{x}) = \ln(1) - \ln(x) = -\ln(x)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

Obs!

Det finns inga motsvarande regel för att förenkla $\ln(x + y)$ eller $\ln(x) \cdot \ln(y)$

Att visa räknelagarna

Enligt våra räknelagar för potenser har vi:

$$e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)} \cdot e^{\ln(y)} = x \cdot y$$

Att visa räknelagarna

Enligt våra räknelagar för potenser har vi:

$$e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)} \cdot e^{\ln(y)} = x \cdot y$$

Så $\ln(x) + \ln(y)$ är det tal som e ska upphöjas till för att ge xy, alltså är $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$.

Att visa räknelagarna

Enligt våra räknelagar för potenser har vi:

$$e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)} \cdot e^{\ln(y)} = x \cdot y$$

Så $\ln(x) + \ln(y)$ är det tal som e ska upphöjas till för att ge xy, alltså är $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$.
De andra räknereglerna kan visas på likande sätt.

MIRIFICI

Logarithmorum
Canonis descriptio,

Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.

Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.

EDINBURGI,
Ex officina ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIↃ. DC. XIV.

John Napier (1550-1617) och hans verk *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio"* där han introducerar logaritmer.

MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi, & expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore, IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, &c. Scoto.
EDINBURGI, Ex officina ANDREÆ HART Bibliopolæ, CIↃ. DC. XIV.

John Napier (1550-1617) och hans verk *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*" där han introducerar logaritmer.

Från introduktionen

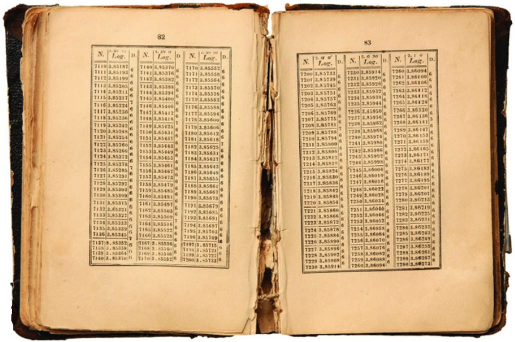
...nothing is more tedious, fellow mathematicians, in the practice of the mathematical arts, than the great delays suffered in the tedium of lengthy multiplications and divisions, the finding of ratios, and in the extraction of square and cube roots... [with] the many slippery errors that can arise...I have found an amazing way of shortening the proceedings

Vad är logaritmer bra till?

För att multiplicera två stora tal x och y: Kolla upp $\ln(x)$ och $\ln(y)$, och *addera*, detta ger $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$, kolla upp vilket tal som har detta logaritm-värde.

Vad är logaritmer bra till?

För att multiplicera två stora tal x och y: Kolla upp $\ln(x)$ och $\ln(y)$, och *addera*, detta ger $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$, kolla upp vilket tal som har detta logaritm-värde.



En bok full med logaritmtabeller

Exempel

Uppgift

Skriv om $\ln(\frac{\sqrt{1000}}{128})$ som en kombination av $\ln(5)$ och $\ln(2)$.

Exempel

Uppgift

Skriv om $\ln(\frac{\sqrt{1000}}{128})$ som en kombination av $\ln(5)$ och $\ln(2)$.

$$\ln(\frac{\sqrt{1000}}{128}) = \ln(\sqrt{1000}) - \ln(128) = \frac{1}{2}\ln(1000) - \ln(2^7) = \frac{1}{2}\ln(5^3 \cdot 2^3) - \ln(2^7)$$
$$= \frac{1}{2}(\ln(5^3) + \ln(2^3)) - 7\ln(2) = \frac{1}{2}(3\ln(5) + 3\ln(2)) - 7\ln(2) = \frac{3}{2}\ln(5) - \frac{11}{2}\ln(2)$$

Exempel

Uppgift

Lös ekvationen $\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(2) + \ln(3-x)$.

Exempel

Uppgift

Lös ekvationen $\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(2) + \ln(3-x)$.

För att alla logaritmer ska vara definierade krävs att $1 < x < 3$. För sådana x gäller:
$\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(2) + \ln(3-x) \Leftrightarrow \ln(x(x-1)) = \ln(2(3-x)) \Leftrightarrow \ln(x^2-x) = \ln(6-2x)$
$\Leftrightarrow x^2 - x = 6 - 2x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0$. Så $x = 2$ eller $x = 3$, men
endast 2 ligger på intervallet, så
svar: Ekvationen har endast lösningen $x = 2$.

Exempel

Uppgift

Lös ekvationen $e^x + 2 = 24e^{-x}$.

Exempel

Uppgift

Lös ekvationen $e^x + 2 = 24e^{-x}$.

$e^x + 2 = 24e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} + 2e^x - 24 = 0$. Med $t = e^x$ får vi
$t^2 + 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow (t+6)(t-4) = 0$ så $t = 4$ eller $t = -6$. Vi går tillbaka till variabeln x:
$-6 = e^x$ saknar lösning, medan $4 = e^x \Leftrightarrow x = \ln(4) = 2\ln(2)$.
Svar: Ekvationens enda lösning är $x = 2\ln(2)$.

Logaritmer för andra baser

Definition

För varje $a > 0$ definierar $\log_a(x)$, a-logaritmen av x, som inversen till a^x. Med andra ord, $\log_a(x)$ är det tal som uppfyller $a^{\log_a(x)} = x$.

Logaritmer för andra baser

Definition

För varje $a > 0$ definierar $\log_a(x)$, a-logaritmen av x, som inversen till a^x. Med andra ord, $\log_a(x)$ är det tal som uppfyller $a^{\log_a(x)} = x$.

Exempel $\log_{10}(1\,000\,000) = 6$

- $\log_a$ uppfyller samma räknelagar som ln.
- Olika logaritmer skiljer sig bara med en konstant, t.ex $\log_{10}(x) = \log_{10}(e^{\ln(x)}) = \ln(x) \cdot \log_{10}(e) \simeq 0.43 \ln(x)$

Exempel

Uppgift

Låt $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Ange funktionens naturliga definitionsmängd och värdemängd. Ta fram funktionens invers ifall en sådan existerar.

Exempel

Uppgift

Låt $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Ange funktionens naturliga definitionsmängd och värdemängd. Ta fram funktionens invers ifall en sådan existerar.

$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$
$\Leftrightarrow ye^{2x} + y = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow e^{2x}(y-1) = -y - 1$
$\Leftrightarrow e^{2x} = -\frac{y+1}{y-1}$ (när $y \neq 1$)
$\Leftrightarrow 2x = \ln(-\frac{y+1}{y-1})$ (när $-\frac{y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow -1 < y < 1$)
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln(-\frac{y+1}{y-1})$ (när $-\frac{y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow -1 < y < 1$)
Så $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln(-\frac{y+1}{y-1})$. Vi byter tillbaka till variabeln x:
Svar: Inversen ges av $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(-\frac{x+1}{x-1})$.
$D_f = \mathbb{R} = V_{f^{-1}}$ och $D_{f^{-1}} =]-1, 1[= V_f$.

Exempel

Uppgift

Låt $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Ange funktionens naturliga definitionsmängd och värdemängd. Ta fram funktionens invers ifall en sådan existerar.

$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$
$\Leftrightarrow ye^{2x} + y = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow e^{2x}(y-1) = -y-1$
$\Leftrightarrow e^{2x} = -\frac{y+1}{y-1}$ (när $y \neq 1$)
$\Leftrightarrow 2x = \ln(-\frac{y+1}{y-1})$ (när $-\frac{y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow -1 < y < 1$)
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln(-\frac{y+1}{y-1})$ (när $-\frac{y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow -1 < y < 1$)
Så $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln(-\frac{y+1}{y-1})$. Vi byter tillbaka till variabeln x:
Svar: Inversen ges av $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(-\frac{x+1}{x-1})$.
$D_f = \mathbb{R} = V_{f^{-1}}$ och $D_{f^{-1}} =]-1,1[= V_f$.
Alternativt kan man ta fram V_f genom att skriva $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$, nämnaren tillhör $]1,\infty[$, så bråket tillhör $]0,2[$, så $f(x)$ tillhör $]-1,1[$.

Del III

Potensfunktioner

Potensfunktioner

Definition

En funktion på form $f(x) = x^a$ kallas för en **potensfunktion**.

Potensfunktioner

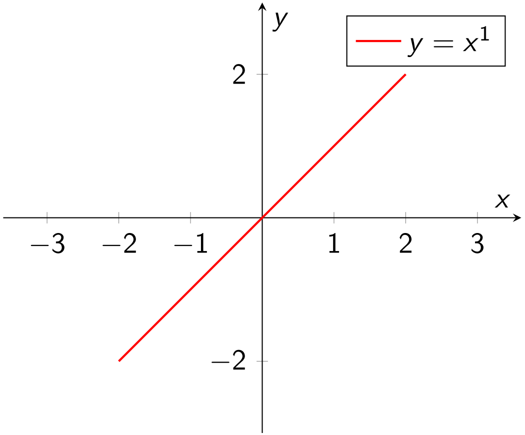
Definition

En funktion på form $f(x) = x^a$ kallas för en **potensfunktion**.

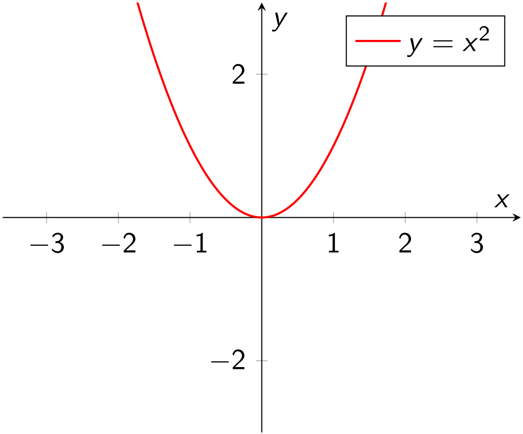
Exempel: $f(x) = x^2$ och $g(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, och $h(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ är potensfunktioner.

- För $a > 0$ är x^a väldefinierat för alla x
- För $a < 0$ kräver vi normalt att $x \geq 0$
- Det finns ingen standardmässig definition för 0^0. I vissa sammanhang definierar man det som 1, i andra som 0 - vanligast är att man lämnar det odefinierat.
- för varje $a > 0$ är $f(x) = x^a$ med $D_f = [0, \infty[$ är strängt växande.

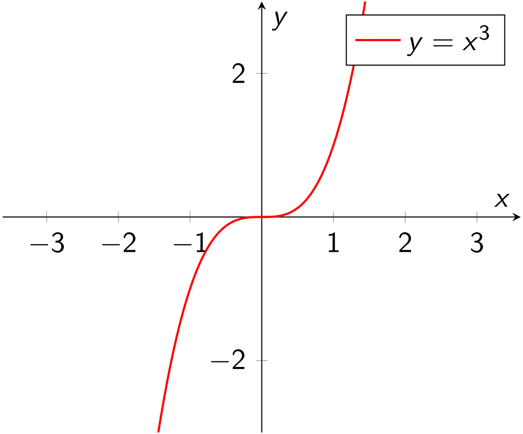
Potensfunktioner naturliga tal som exponenter



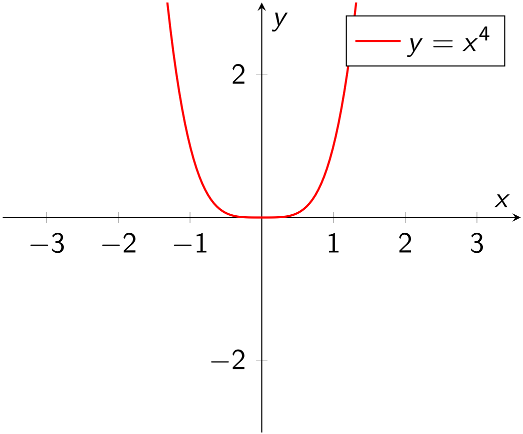
Potensfunktioner naturliga tal som exponenter



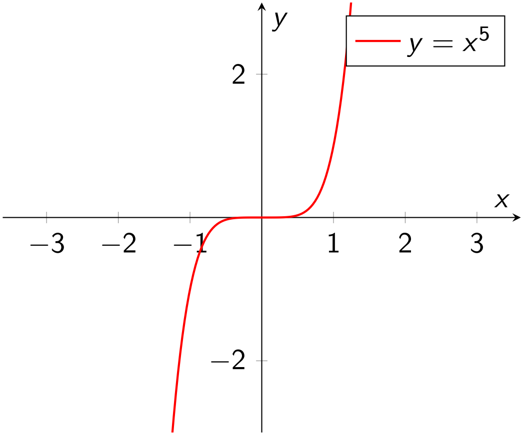
Potensfunktioner naturliga tal som exponenter



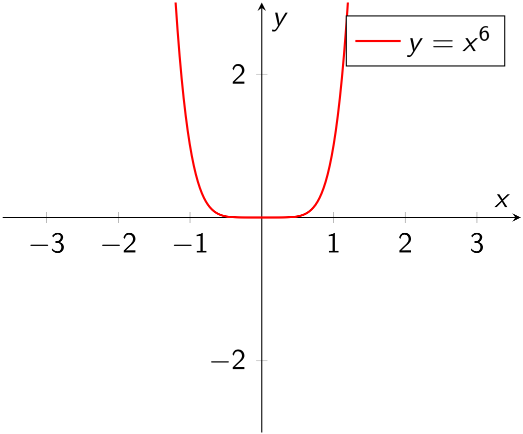
Potensfunktioner naturliga tal som exponenter



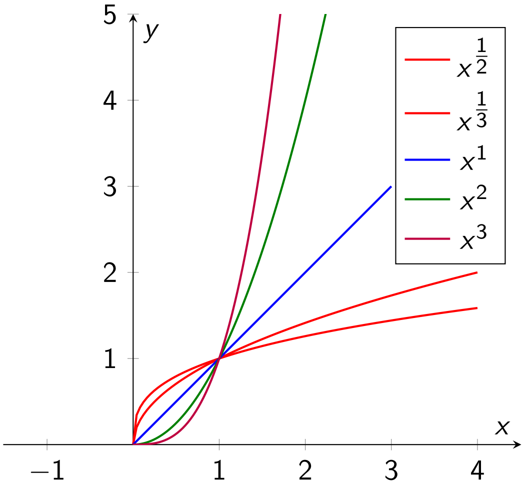
Potensfunktioner naturliga tal som exponenter



Potensfunktioner naturliga tal som exponenter



Reella exponenter för $x \geq 0$



Uppgift

Lös ekvationen $\ln(1 - e^{2x}) = -7$.

Uppgift

Lös ekvationen $\ln(1 - e^{2x}) = -7$.

$$\ln(1 - e^{2x}) = -7 \;\Leftrightarrow\; 1 - e^{2x} = e^{-7} \;\Leftrightarrow\; e^{2x} = 1 - e^{-7}$$
$$\Leftrightarrow\; 2x = \ln(1 - e^{-7}) \;\Leftrightarrow\; x = \tfrac{1}{2}\ln(1 - e^{-7})$$


Tack för idag!