Grunk Föreläsning 7

Trigonometri

Jonathan Nilsson

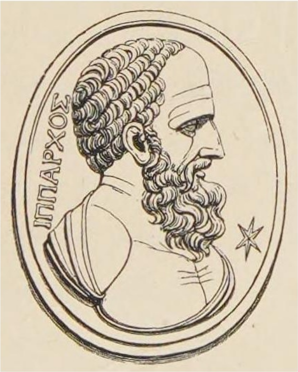
Linköpings Universitet

Idag

- Trigonometri
  - Trigonometriska funktioner
  - Standardvinklar
  - Samband of formler
  - Ekvationslösning

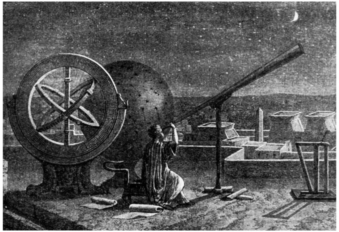
Trigonometri

Från grekiska Trigonon (triangel) och Metron (mätning). Grekerna lade grunderna till trigonometri kring 300 f.kr, men civilisationerna i Indien och Babylonien kände också till trigonometri tidigt.



Hippoarchos 200 BC, Guo Shoujing 1300 AD, bok av al-Khwārizmī 800 AD

Varför trigonometri?

Trigonometri användes tidigt för

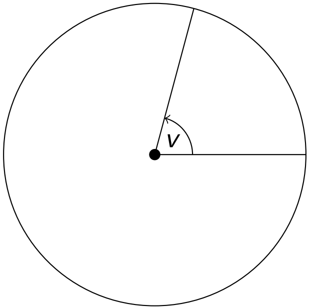
- Konstruktion och arkitektur
- Astronomi, räkning på himlakroppar
- Navigation till sjöss
- Beräkning av jordens storlek (Eratosthenes 200 BC)

Del I

Vinklar och trigonometriska funktioner

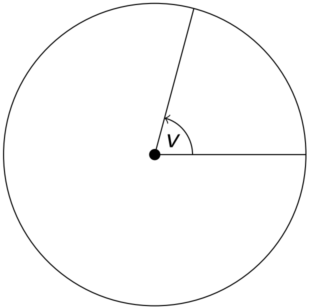
Enhetscirkeln

Enhetscirkeln har ekvation $x^2 + y^2 = 1$. Den är centrerad i origo och har radie 1. Vi mäter vinklar v i enhetscirkeln från positiva x-axeln och moturs.



Enhetscirkeln

Enhetscirkeln har ekvation $x^2 + y^2 = 1$. Den är centrerad i origo och har radie 1. Vi mäter vinklar v i enhetscirkeln från positiva x-axeln och moturs.



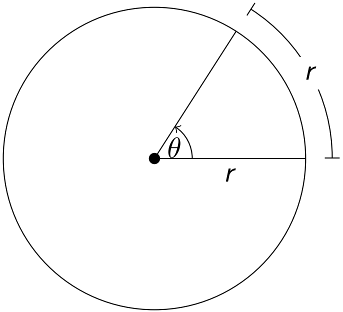
Notera, vinklar tillåts vara större än ett helt varv, vinklar kan också vara negativa.

Radianer

Standardenheten för att mäta vinklar kallas **radianer**.

Radianer

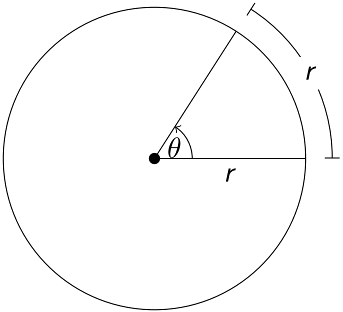
Standardenheten för att mäta vinklar kallas **radianer**.



En radian motsvarar ett cirkelsegment med samma längd som radien (alltså 1 i enhetscirkeln).

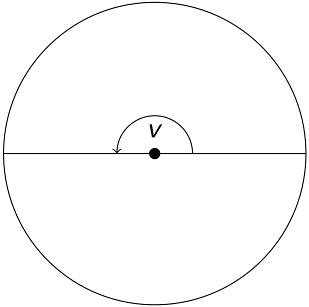
Radianer

Standardenheten för att mäta vinklar kallas **radianer**.



En radian motsvarar ett cirkelsegment med samma längd som radien (alltså 1 i enhetscirkeln).
Så ett varv motsvarar 2π radianer.

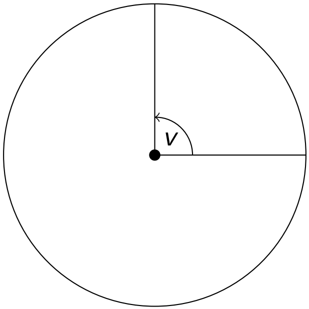
Några standardvinklar



Vinklar

$$v = \pi \text{ radianer} = 180 \text{ grader}$$

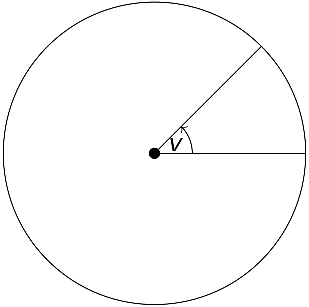
Några standardvinklar



Vinklar

$$v = \frac{\pi}{2} \text{ radianer} = 90 \text{ grader}$$

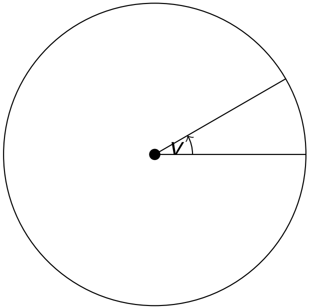
Några standardvinklar



Vinklar

$$v = \frac{\pi}{4} \text{ radianer} = 45 \text{ grader}$$

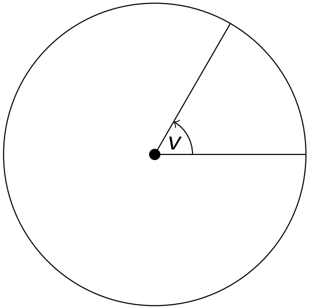
Några standardvinklar



Vinklar

$$v = \frac{\pi}{6} \text{ radianer} = 30 \text{ grader}$$

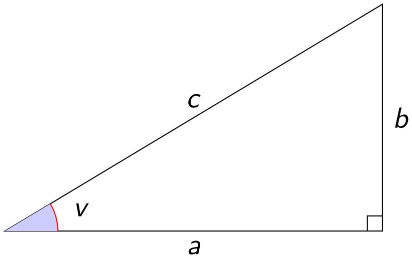
Några standardvinklar



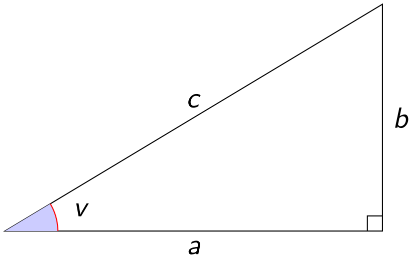
Vinklar

$$v = \frac{\pi}{3} \text{ radianer} = 60 \text{ grader}$$

Sinus, cosinus, tangens, cotangens



Sinus, cosinus, tangens, cotangens



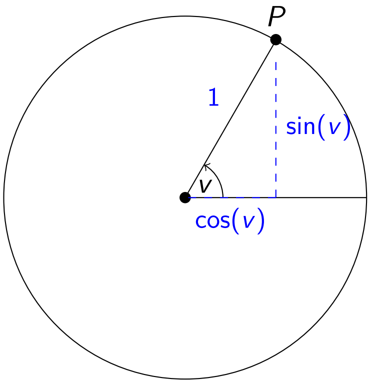
Definition

Vi definierar $\sin(v) = \frac{b}{c}$ och $\cos(v) = \frac{a}{c}$ och $\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \frac{b}{a}$ och $\cot(v) = \frac{\cos(v)}{\sin(v)} = \frac{a}{b}$
Obs! Ibland skriver man $\sin v$ istället för $\sin(v)$.

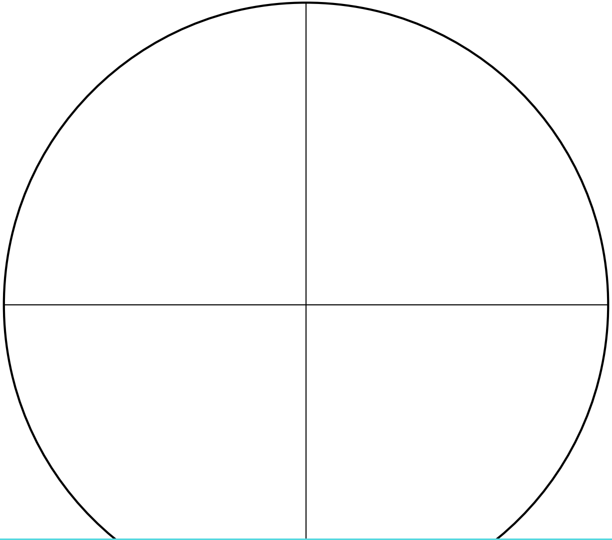
Definition med hjälp av enhetscirkeln

Definition

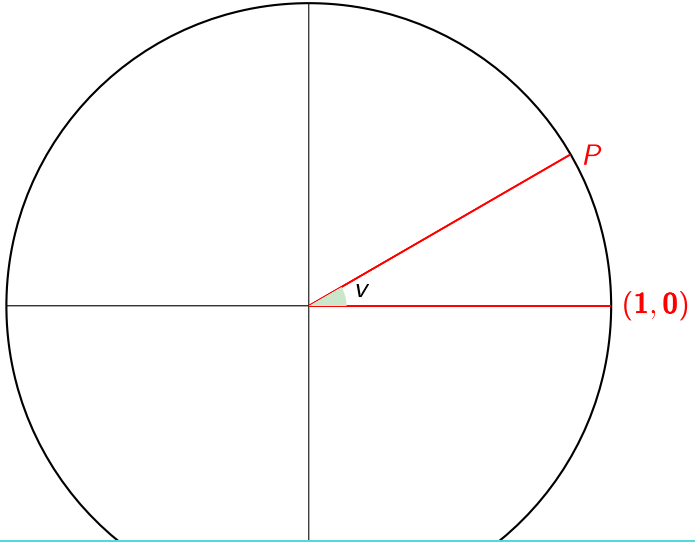
I bilden på enhetscirkeln nedan har punkten P koordinaterna $(x, y) = (\cos(v), \sin(v))$.



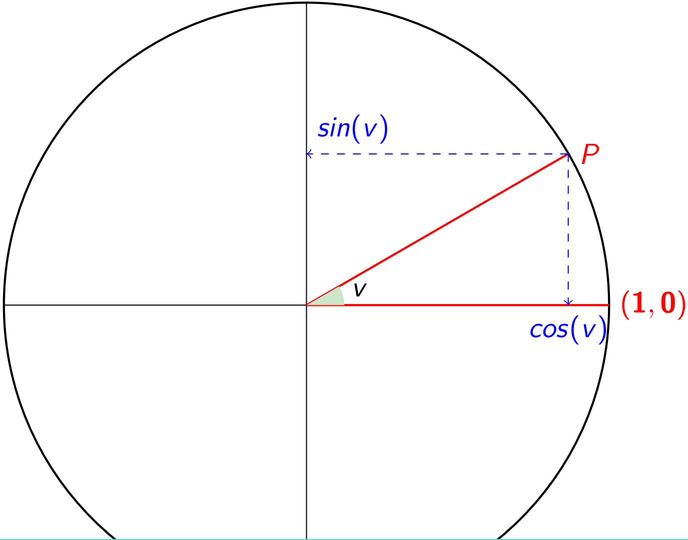
Vinklar större än $\frac{\pi}{2}$



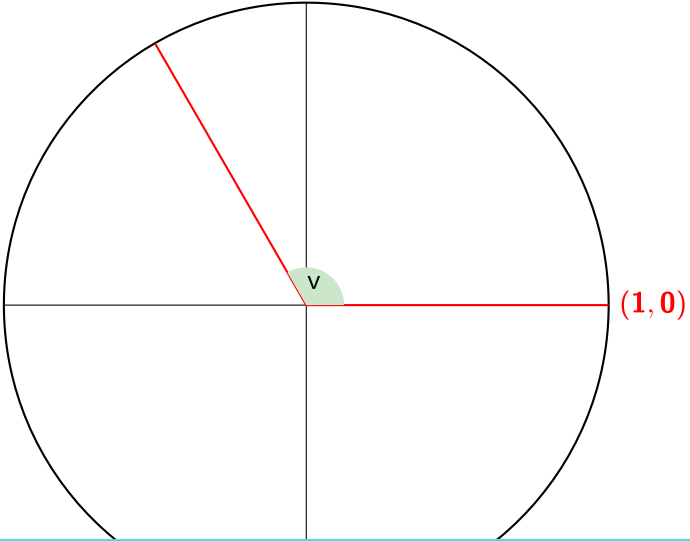
Vinklar större än $\frac{\pi}{2}$



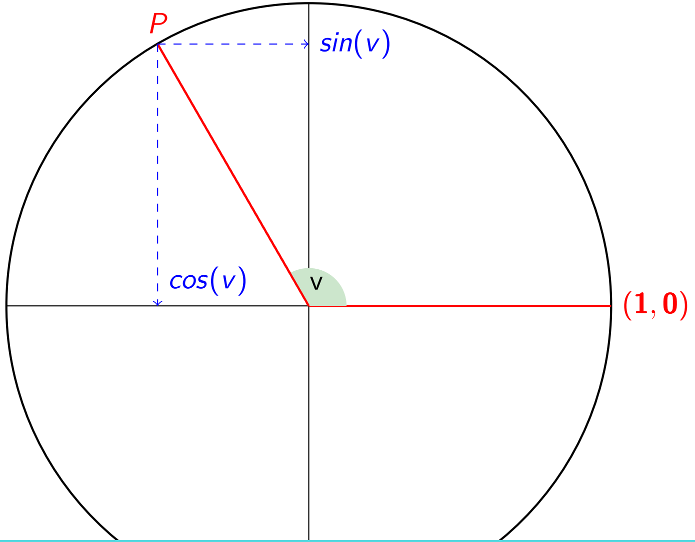
Vinklar större än $\frac{\pi}{2}$



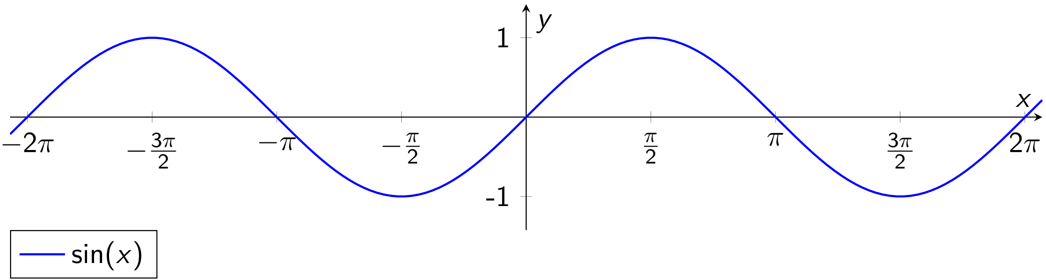
Vinklar större än $\frac{\pi}{2}$



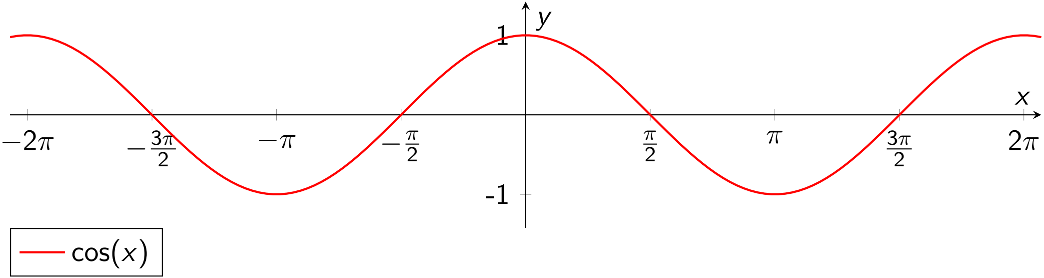
Vinklar större än $\frac{\pi}{2}$



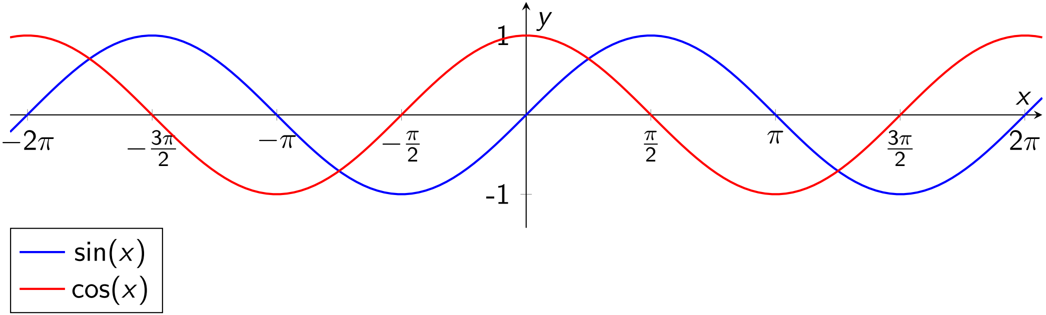
Grafer för sinus och cosinus



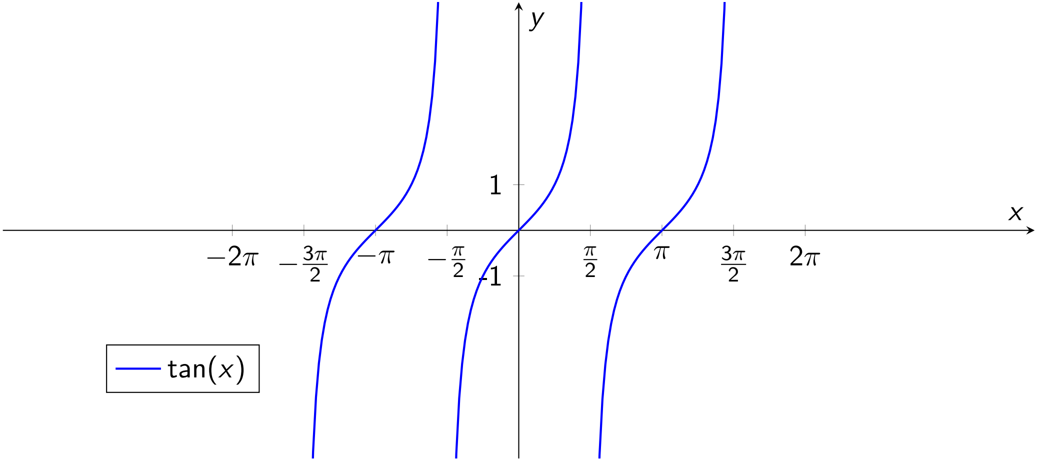
Grafer för sinus och cosinus



Grafer för sinus och cosinus



Grafen för tangens



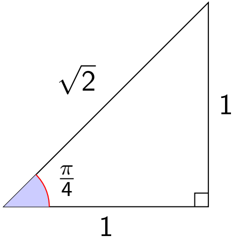
Notera att $\tan(x)$ är odefinierad då $\cos(x) = 0$, alltså då $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Del II

Standardvinklar

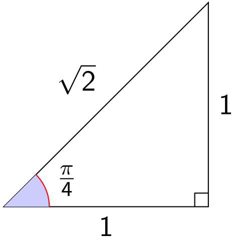
En standardtriangel för vinkeln $\frac{\pi}{4}$

Ta en rätvinklig likbent triangel där två sidor är 1. Pythagoras sats ger:



En standardtriangel för vinkeln $\frac{\pi}{4}$

Ta en rätvinklig likbent triangel där två sidor är 1. Pythagoras sats ger:

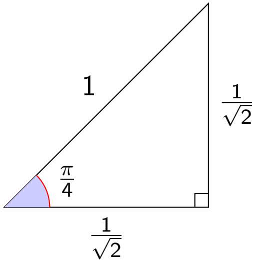


Slutsats

Från bilden ser vi att $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

En standardtriangel för vinkeln $\frac{\pi}{4}$

Ta en rätvinklig likbent triangel där två sidor är 1. Pythagoras sats ger:



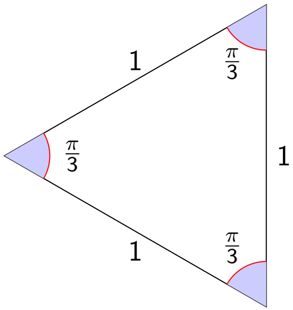
Slutsats

Från bilden ser vi att $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Alternativt kan man skala om bilden med en faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

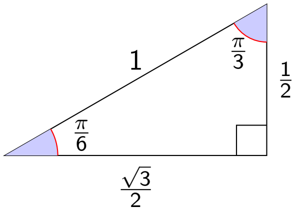
En standardtriangel för vinklarna $\frac{\pi}{6}$ och $\frac{\pi}{3}$

Ta en likbent triangel med sidan 1.



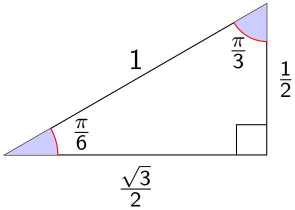
En standardtriangel för vinklarna $\frac{\pi}{6}$ och $\frac{\pi}{3}$

Ta en likbent triangel med sidan 1. Dela den på mitten. Pythagoras sats ger sidorna.



En standardtriangel för vinklarna $\frac{\pi}{6}$ och $\frac{\pi}{3}$

Ta en likbent triangel med sidan 1. Dela den på mitten. Pythagoras sats ger sidorna.

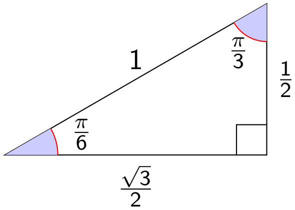


Slutsats

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{1}{2} \quad \text{och} \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

En standardtriangel för vinklarna $\frac{\pi}{6}$ och $\frac{\pi}{3}$

Ta en likbent triangel med sidan 1. Dela den på mitten. Pythagoras sats ger sidorna.



Slutsats

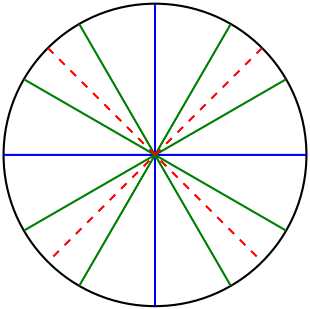
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{1}{2} \quad \text{och} \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2}$$

Andra vinklar

Med dessa två trianglar kan vi med symmetrier i enhetscirkeln ta fram sinus och cosinus för:

Standardvinklar

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}.$$



Exempel

Uppgift

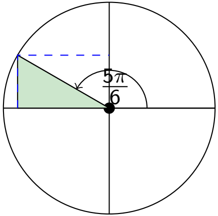
Bestäm $\tan(\frac{17\pi}{6})$.

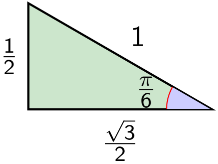
Exempel

Uppgift

Bestäm $\tan(\frac{17\pi}{6})$.

Lösning: Vinkeln $v = \frac{17\pi}{6}$ uppfyller inte $0 \leq v < 2\pi$, men vi har $\tan(\frac{17\pi}{6}) = \tan(\frac{17\pi}{6} - 2\pi) = \tan(\frac{5\pi}{6})$, vi ritar vinkeln i enhetscirkeln:



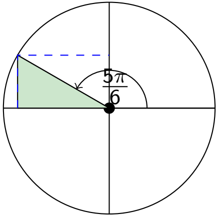


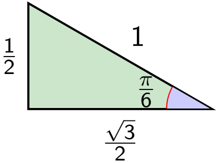
Exempel

Uppgift

Bestäm $\tan(\frac{17\pi}{6})$.

Lösning: Vinkeln $v = \frac{17\pi}{6}$ uppfyller inte $0 \leq v < 2\pi$, men vi har $\tan(\frac{17\pi}{6}) = \tan(\frac{17\pi}{6} - 2\pi) = \tan(\frac{5\pi}{6})$, vi ritar vinkeln i enhetscirkeln:





Härifrån ser vi att $\tan(\frac{5\pi}{6}) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Alternativt kan man beräkna det som en kvot mellan sinus och cosinus. **Svar:** $\tan(\frac{17\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Del III

Trigonometriska samband

Många formler

Kursen innehåller väldigt många trigonometriska samband som man behöver komma ihåg utan formelblad.

Många formler

Kursen innehåller väldigt många trigonometriska samband som man behöver komma ihåg utan formelblad.

Tips!

Memorera inte standardvinklar och trigonometriska samband, utan visualisera dem geometriskt i enhetscirkeln, lär dig hur man tar fram dem.

Periodicitet

Lägger jag på ett helt varv på en vinkel får jag såklart samma sinus och cosinusvärden.

Periodicitet

Lägger jag på ett helt varv på en vinkel får jag såklart samma sinus och cosinusvärden.

Samband

$\sin(v + 2\pi) = \sin(v)$ och $\cos(v + 2\pi) = \cos(v)$

Periodicitet

Lägger jag på ett helt varv på en vinkel får jag såklart samma sinus och cosinusvärden.

Samband

$\sin(v + 2\pi) = \sin(v)$ och $\cos(v + 2\pi) = \cos(v)$
eller mer allmänt: $\sin(v + 2\pi n) = \sin(v)$ och $\cos(v + 2\pi n) = \cos(v)$ för alla $n \in \mathbb{Z}$

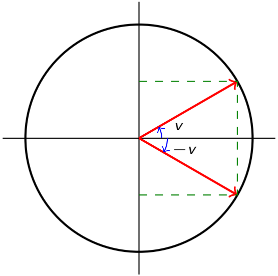
Periodicitet

Lägger jag på ett helt varv på en vinkel får jag såklart samma sinus och cosinusvärden.

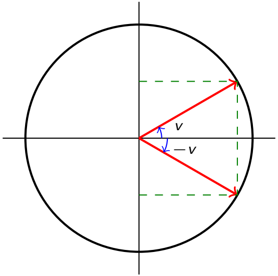
Samband

$\sin(v + 2\pi) = \sin(v)$ och $\cos(v + 2\pi) = \cos(v)$
eller mer allmänt: $\sin(v + 2\pi n) = \sin(v)$ och $\cos(v + 2\pi n) = \cos(v)$ för alla $n \in \mathbb{Z}$
Dessutom har vi $\tan(v + \pi) = \tan(v)$ och alltså $\tan(v + \pi n) = \tan(v)$ för $n \in \mathbb{Z}$.

Jämn och udda



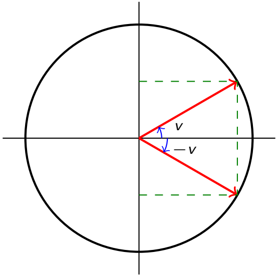
Jämn och udda



Samband

$\cos(-v) = \cos(v)$, vi säger att cosinus är en **jämn** funktion.

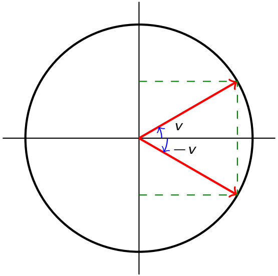
Jämn och udda



Samband

$\cos(-v) = \cos(v)$, vi säger att cosinus är en **jämn** funktion.
$\sin(-v) = -\sin(v)$, vi säger att sinus är en **udda** funktion.

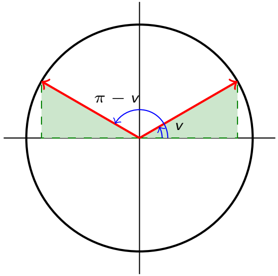
Jämn och udda



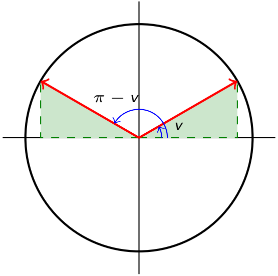
Samband

$\cos(-v) = \cos(v)$, vi säger att cosinus är en **jämn** funktion.
$\sin(-v) = -\sin(v)$, vi säger att sinus är en **udda** funktion.
$\tan(-v) = \frac{\sin(-v)}{\cos(-v)} = \frac{-\sin(v)}{\cos(v)} = -\tan(v)$, så tangens är udda.

π minus en vinkel



π minus en vinkel

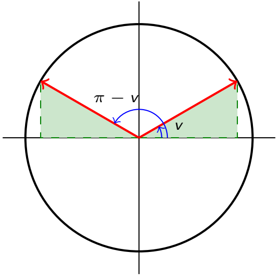


De två trianglarna är kongruenta så vi ser:

Samband

$\sin(\pi - v) = \sin(v)$

π minus en vinkel

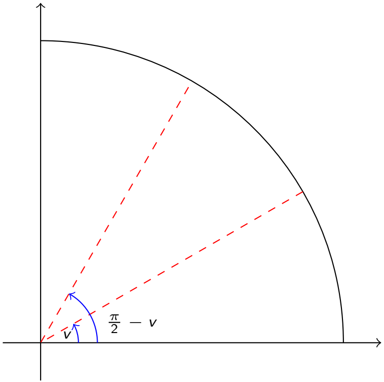


De två trianglarna är kongruenta så vi ser:

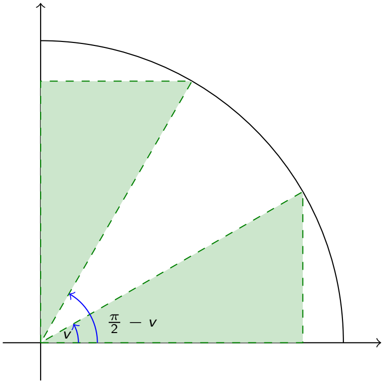
Samband

$\sin(\pi - v) = \sin(v)$ och $\cos(\pi - v) = -\cos(v)$ för alla vinklar v.

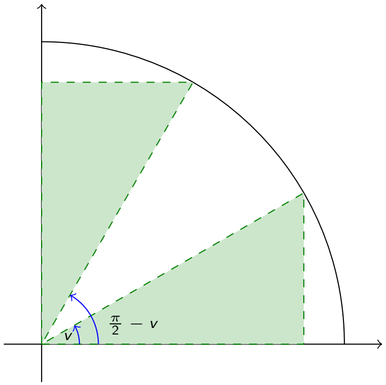
$\frac{\pi}{2}$ minus en vinkel



$\frac{\pi}{2}$ minus en vinkel



$\frac{\pi}{2}$ minus en vinkel

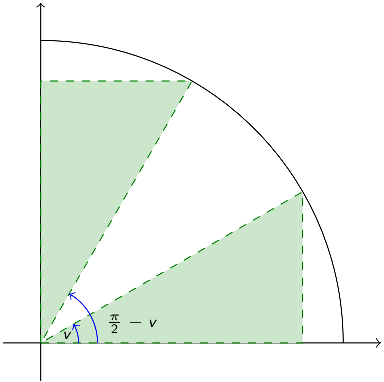


De två trianglarna är kongruenta så vi ser:

Samband

$\sin(\frac{\pi}{2} - v) = \cos(v)$

$\frac{\pi}{2}$ minus en vinkel

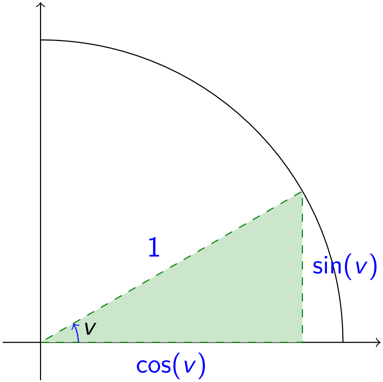


De två trianglarna är kongruenta så vi ser:

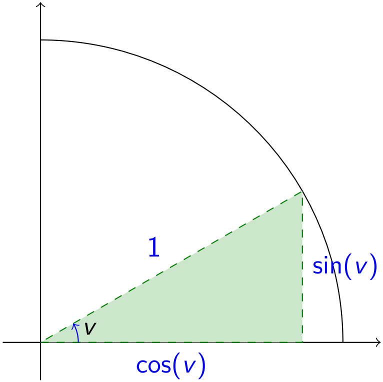
Samband

$\sin(\frac{\pi}{2} - v) = \cos(v)$ och $\cos(\frac{\pi}{2} - v) = \sin(v)$ för alla vinklar v.

Trigonometriska ettan



Trigonometriska ettan



Pythagoras sats i enhetscirkeln ger

Trigonometriska ettan

$\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$ för alla vinklar v.

Additionsformler och dubbla vinkeln

För sinus

$$\sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)$$

Additionsformler och dubbla vinkeln

För sinus

$\sin(u + v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)$
$\sin(2v) = 2\sin(v)\cos(v)$

Additionsformler och dubbla vinkeln

För sinus

$\sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)$
$\sin(2v) = 2\sin(v)\cos(v)$

För cosinus

$\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$

Additionsformler och dubbla vinkeln

För sinus

$\sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)$
$\sin(2v) = 2\sin(v)\cos(v)$

För cosinus

$\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$
$\cos(2v) = \cos^2(v) - \sin^2(v)$

Additionsformler och dubbla vinkeln

För sinus

$\sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)$
$\sin(2v) = 2\sin(v)\cos(v)$

För cosinus

$\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$
$\cos(2v) = \cos^2(v) - \sin^2(v)$

För tangens

$\tan(u+v) = \frac{\tan(u)+\tan(v)}{1-\tan(u)\tan(v)}$

Additionsformler och dubbla vinkeln

För sinus

$\sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)$
$\sin(2v) = 2\sin(v)\cos(v)$

För cosinus

$\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$
$\cos(2v) = \cos^2(v) - \sin^2(v)$

För tangens

$\tan(u+v) = \frac{\tan(u)+\tan(v)}{1-\tan(u)\tan(v)}$
$\tan(2v) = \frac{2\tan(v)}{1-\tan^2(v)}$

Sammanfattning

Trigonometriska samband värda att minnas (eller kunna ta fram)

För vinklar u och v har vi

- $\sin^2(v) + \cos^2(v) = 1$
- $\cos(-v) = \cos(v)$ och $\sin(-v) = -\sin(v)$
- $\sin(v + 2\pi n) = \sin(v)$ och $\cos(v + 2\pi n) = \cos(v)$ and $\tan(v + \pi n) = \tan(v)$, $n \in \mathbb{Z}$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - v) = \cos(v)$ and $\cos(\frac{\pi}{2} - v) = \sin(v)$
- $\sin(u + v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)$
- $\cos(u + v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$
- $\tan(u + v) = \frac{\tan(u)+\tan(v)}{1-\tan(u)\tan(v)}$

Exempel

Uppgift

Beräkna $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exempel

Uppgift

Beräkna $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Lösning: Först noterar vi att $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$. Enligt additionsformeln för sinus:

$$\sin(\tfrac{\pi}{12}) = \sin(\tfrac{\pi}{4} + (-\tfrac{\pi}{6})) = \sin(\tfrac{\pi}{4})\cos(-\tfrac{\pi}{6}) + \cos(\tfrac{\pi}{4})\sin(-\tfrac{\pi}{6})$$

$$= \sin(\tfrac{\pi}{4})\cos(\tfrac{\pi}{6}) - \cos(\tfrac{\pi}{4})\sin(\tfrac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Del IV

Trigonometrisk ekvationslösning

Exempel

Uppgift

Vi vet att $\sin(v) = \frac{1}{3}$ och att $\frac{\pi}{2} < v < \pi$. Beräkna $\cos(v)$.

Exempel

Uppgift

Vi vet att $\sin(v) = \frac{1}{3}$ och att $\frac{\pi}{2} < v < \pi$. Beräkna $\cos(v)$.

Lösning: Från trigonometriska ettan får vi $cos^2(v) = 1 - \sin^2(v) = 1 - (\frac{1}{3})^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$
Alltså blir $\cos(v) = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Är det plus eller minus? Enligt uppgiften ligger vinkeln i andra kvadranten, och där är cosinus negativt, alltså har vi
Svar: $\cos(v) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Exempel

Uppgift

Ange **alla** lösningar till ekvationen $\sin(5v) = \frac{1}{2}$.

Exempel

Uppgift

Ange **alla** lösningar till ekvationen $\sin(5v) = \frac{1}{2}$.

Lösning: Nu finns det två möjligheter, $5v = \frac{\pi}{6}$ och den ”speglade” vinkeln i andra kvadranten, $5v = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Dessutom kan vi ju lägga ett antal hela varv, alltså en multipel av 2π och få samma sinusvärden. Slutsats:

$$\begin{cases} 5v = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \\ \quad \text{eller} \\ 5v = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{\pi}{30} + \frac{2n\pi}{5} \\ \quad \text{eller} \\ v = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{5} \end{cases} \quad \text{där } n \in \mathbb{Z}.$$

Exempel

Uppgift

Lös ekvationen $\cos(2v) = \cos(5v)$. Hur många av lösningarna ligger på intervallet $[0, 2\pi[$?

Exempel

Uppgift

Lös ekvationen $\cos(2v) = \cos(5v)$. Hur många av lösningarna ligger på intervallet $[0, 2\pi[$?

Lösning: Vi får två möjligheter:

$$\begin{cases} 5v = 2v + 2n\pi \\ \qquad \text{eller} \\ 5v = -2v + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{2n\pi}{3} \\ \qquad \text{eller} \\ v = \frac{2n\pi}{7} \end{cases} \quad \text{där } n \in \mathbb{Z}.$$

Det första fallet ger tre lösningar på intervallet, när $n = 0, 1, 2$. Det andra fallet ger sju lösningar då $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Notera dock att $n = 0$ ger i bägge fall lösningen $v = 0$, så stryker vi en ur denna dublett får vi **Svar:** Alla lösningar ges ovan, det finns totalt 9 olika lösningar på intervallet $[0, 2\pi[$.

Exempel

Uppgift

Lös ekvationen $\sin(2x) + \cos(x) = 0$ då $0 \le x < 2\pi$.

Exempel

Uppgift

Lös ekvationen $\sin(2x) + \cos(x) = 0$ då $0 \leq x < 2\pi$.

Lösning: Med sinus för dubbla vinkeln får vi

$$\sin(2x) + \cos(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) + \cos(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x)\big(2\sin(x) + 1\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \text{eller} \\ \sin(x) = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}.$$

Exempel

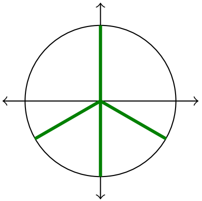
Uppgift

Lös ekvationen $\sin(2x) + \cos(x) = 0$ då $0 \leq x < 2\pi$.

Lösning: Med sinus för dubbla vinkeln får vi

$\sin(2x) + \cos(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) + \cos(x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(x)(2\sin(x) + 1) = 0$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \text{eller} \\ \sin(x) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{7\pi}{6}, \tfrac{11\pi}{6}\}.$$

Exempel

Uppgift

Lös ekvationen $2\sin^3(x) + 5 = 5\cos^2(x) + 3\sin(x)$.

Exempel

Uppgift

Lös ekvationen $2\sin^3(x) + 5 = 5\cos^2(x) + 3\sin(x)$.

Med trig-ettan kan vi skriva om $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ och förenkla ekvationen till

$$2\sin^3(x) + 5\sin^2(x) - 3\sin(x) = 0.$$

Med $\sin(x) = t$ blir vänsterledet $2t^3 + 5t^2 - 2t = 2t(t^2 + \frac{5}{2}t - \frac{3}{2}) = 2t((t + \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16} - \frac{3}{2})$
$= 2t((t + \frac{5}{4})^2 - \frac{49}{16}) = 2t((t + \frac{5}{4})^2 - (\frac{7}{4})^2) = 2t(t - \frac{1}{2})(t + 3)$
vilket blir noll då $t \in \{0, \frac{1}{2}, -3\}$. Vi går tillbaka till variabeln x:
$\sin(x) = 0$ ger lösningarna $x = n\pi$, $\sin(x) = -3$ saknar lösning, och $\sin(x) = \frac{1}{2}$ har lösningarna $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ samt $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$.
Svar: Ekvationens lösningar är $x = n\pi$ eller $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ för varje $n \in \mathbb{Z}$.

Tack för idag!