# Grunk Föreläsning 8

## Hjälpvinklar och arcusfunktioner

Jonathan Nilsson

Linköpings Universitet

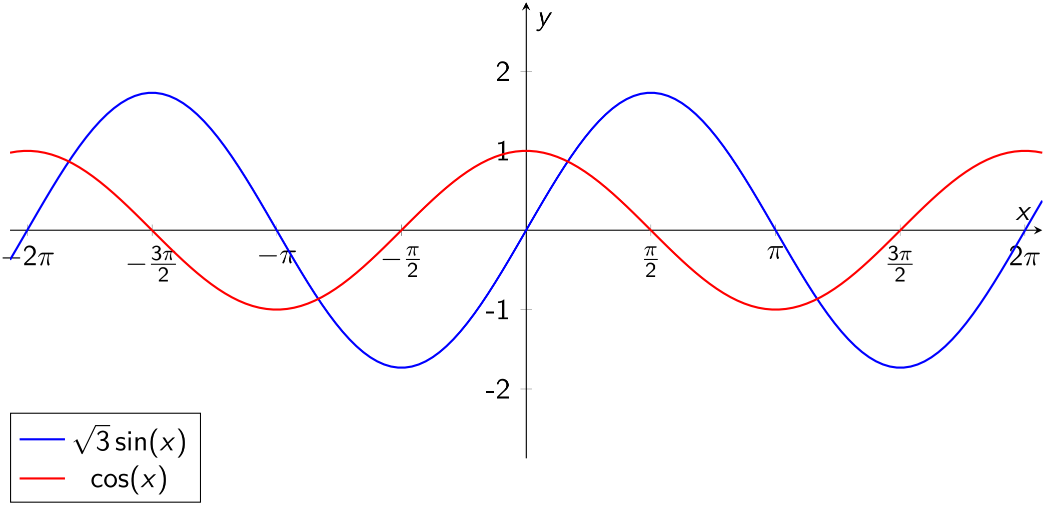
# Idag

- Hjälpvinkelsatsen
- Arcusfunktioner

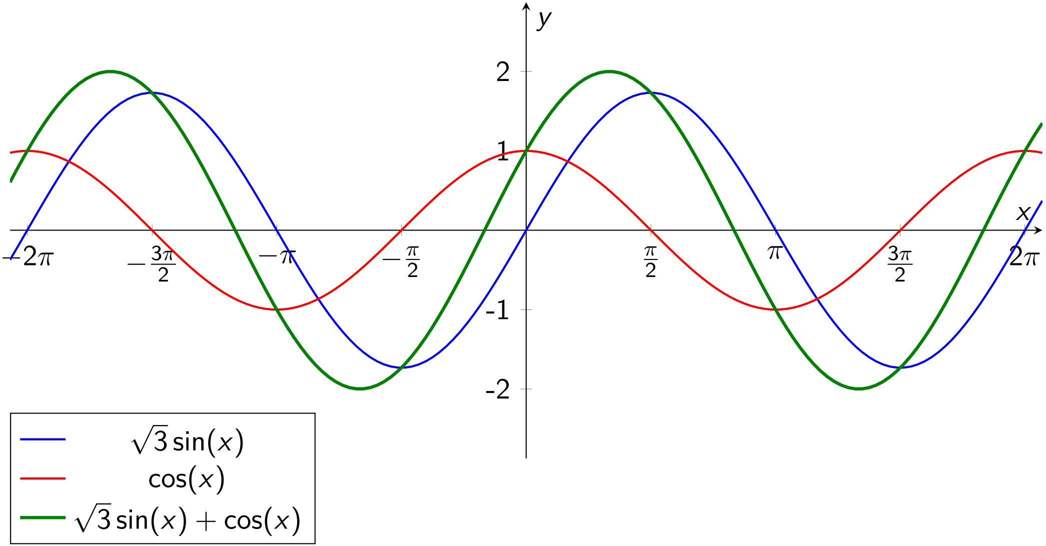
# Del I

# Hjälpvinkelsatsen

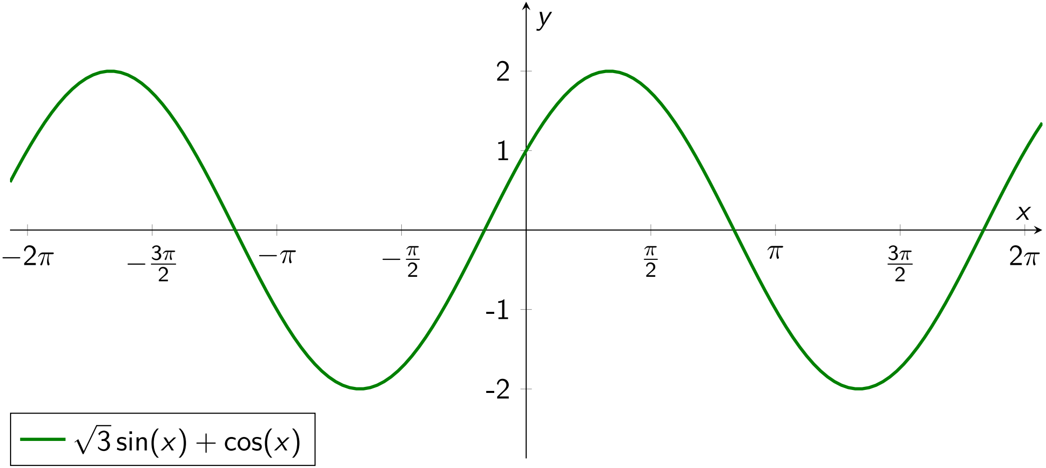
# Summan av en sinus och en cosinusfunktion



# Summan av en sinus och en cosinusfunktion



# Summan av en sinus och en cosinusfunktion




Kurvan ser ut som en enda omskalad och förflyttad sinusfunktion!

# Exempel

## Uppgift

Lös ekvationen $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$ genom att först skriva vänsterledet som en enda sinusfunktion.

# Exempel

## Uppgift

Lös ekvationen $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$ genom att först skriva vänsterledet som en enda sinusfunktion.

Ideén är att hitta tal $C > 0$ och $v \in [0, 2\pi[$ så att $C\sin(x+v) = \sqrt{3}\sin(x) + \cos(x)$. Additionsformeln för sinus ger $C\sin(x+v) = C\cos(v)\sin(x) + C\sin(v)\cos(x)$, så för att likhet ska råda för alla $x$ måste vi ha $\begin{cases} C\cos(v) = \sqrt{3} \\ C\sin(v) = 1 \end{cases}$. Vi kvadrerar båda ekvationerna $\begin{cases} C^2\cos^2(v) = 3 \\ C^2\sin^2(v) = 1 \end{cases}$, och adderar vi dessa fås $C^2(\cos^2(v) + \sin^2(v)) = 4$, så $C^2 = 4$ enligt trig-ettan, och $C = 2$ eftersom vi ville ha $C$ positivt.

Nu har vi $C$, och vårt system kan skrivas $\begin{cases} \cos(v) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(v) = \frac{1}{2} \end{cases}$, vilket ger $v = \frac{\pi}{6}$ (exempelvis).

# Exempel

## Uppgift

Lös ekvationen $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$ genom att först skriva vänsterledet som en enda sinusfunktion.

Ideén är att hitta tal $C > 0$ och $v \in [0, 2\pi[$ så att $C\sin(x+v) = \sqrt{3}\sin(x) + \cos(x)$. Additionsformeln för sinus ger $C\sin(x+v) = C\cos(v)\sin(x) + C\sin(v)\cos(x)$, så för att likhet ska råda för alla $x$ måste vi ha $\begin{cases} C\cos(v) = \sqrt{3} \\ C\sin(v) = 1 \end{cases}$. Vi kvadrerar båda ekvationerna $\begin{cases} C^2\cos^2(v) = 3 \\ C^2\sin^2(v) = 1 \end{cases}$, och adderar vi dessa fås $C^2(\cos^2(v) + \sin^2(v)) = 4$, så $C^2 = 4$ enligt trig-ettan, och $C = 2$ eftersom vi ville ha $C$ positivt.

Nu har vi $C$, och vårt system kan skrivas $\begin{cases} \cos(v) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(v) = \frac{1}{2} \end{cases}$, vilket ger $v = \frac{\pi}{6}$ (exempelvis).

Vänsterledet i uppgiften kan alltså förenklas som $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$.

# Fortsättning

Ekvationen i uppgiften kan alltså skrivas $2\sin(x+\frac{\pi}{6}) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ vilket ger

$$\begin{cases} x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ \text{eller} \\ x+\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2n\pi \\ \text{eller} \\ x = \frac{7\pi}{12} + 2n\pi \end{cases} \quad \text{där } n \in \mathbb{Z}$$

**Svar:** Ekvationens lösningar ges av $x = \frac{\pi}{12} + 2n\pi$ eller $x = \frac{7\pi}{12} + 2n\pi$ där $n \in \mathbb{Z}$.

# Mer allmänt

**Hjälpvinkelsatsen**

Givet ett uttryck $A\sin(x) + B\cos(x)$ där $A$ och $B$ är reella tal, så finns det unika tal $C > 0$ och $0 \leq v < 2\pi$ så att

$$A\sin(x) + B\cos(x) = C\sin(x + v).$$

# Mer allmänt

## Hjälpvinkelsatsen

Givet ett uttryck $A\sin(x) + B\cos(x)$ där $A$ och $B$ är reella tal, så finns det unika tal $C > 0$ och $0 \leq v < 2\pi$ så att
$$A\sin(x) + B\cos(x) = C\sin(x + v).$$

- Vi har alltid $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ som i föregående exempel

# Mer allmänt

## Hjälpvinkelsatsen

Givet ett uttryck $A\sin(x) + B\cos(x)$ där $A$ och $B$ är reella tal, så finns det unika tal $C > 0$ och $0 \leq v < 2\pi$ så att

$$A\sin(x) + B\cos(x) = C\sin(x + v).$$

- Vi har alltid $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ som i föregående exempel
- Vinkeln $v$ fås genom att lösa $\cos(v) = \frac{A}{C}$ och $\sin(v) = \frac{B}{C}$

# Mer allmänt

## Hjälpvinkelsatsen

Givet ett uttryck $A\sin(x) + B\cos(x)$ där $A$ och $B$ är reella tal, så finns det unika tal $C > 0$ och $0 \leq v < 2\pi$ så att
$$A\sin(x) + B\cos(x) = C\sin(x + v).$$

- Vi har alltid $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ som i föregående exempel
- Vinkeln $v$ fås genom att lösa $\cos(v) = \frac{A}{C}$ och $\sin(v) = \frac{B}{C}$
- Man kan också välja $C$ och/eller $v$ negativa om man vill

# Mer allmänt

## Hjälpvinkelsatsen

Givet ett uttryck $A\sin(x) + B\cos(x)$ där $A$ och $B$ är reella tal, så finns det unika tal $C > 0$ och $0 \leq v < 2\pi$ så att

$$A\sin(x) + B\cos(x) = C\sin(x + v).$$

- Vi har alltid $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ som i föregående exempel
- Vinkeln $v$ fås genom att lösa $\cos(v) = \frac{A}{C}$ och $\sin(v) = \frac{B}{C}$
- Man kan också välja $C$ och/eller $v$ negativa om man vill

## Tips!

Memorera metoden, inte formeln!

# Mer allmänt

## Hjälpvinkelsatsen

Givet ett uttryck $A\sin(x) + B\cos(x)$ där $A$ och $B$ är reella tal, så finns det unika tal $C > 0$ och $0 \leq v < 2\pi$ så att
$$A\sin(x) + B\cos(x) = C\sin(x + v).$$

- Vi har alltid $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ som i föregående exempel
- Vinkeln $v$ fås genom att lösa $\cos(v) = \frac{A}{C}$ och $\sin(v) = \frac{B}{C}$
- Man kan också välja $C$ och/eller $v$ negativa om man vill

## Tips!

Memorera metoden, inte formeln!

## Obs!

Metoden kan inte användas för att skriva ihop t.ex. $2\sin(x) + 3\cos(2x)$, frekvenserna måste vara lika.

# Del II

## Arcusfunktioner

# Invers för $\sin(x)$

**Fråga**: Har sinusfuntionen en invers?

# Invers för $\sin(x)$

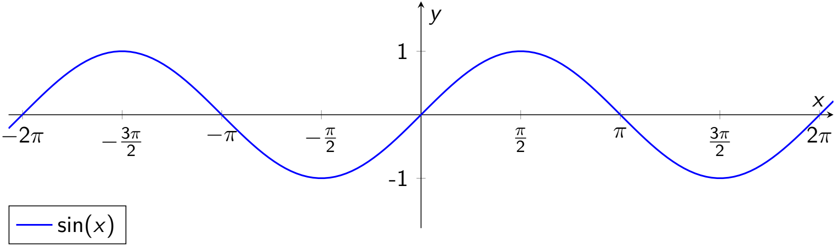
**Fråga**: Har sinusfuntionen en invers?

Vi har $D_{\sin} = \mathbb{R}$ och $V_{\sin} = [-1, 1]$. Vi söker alltså en funktion $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ så att $\sin^{-1}(\sin(x)) = x$ för alla $x$.

# Invers för $\sin(x)$

**Fråga**: Har sinusfuntionen en invers?

Vi har $D_{\sin} = \mathbb{R}$ och $V_{\sin} = [-1, 1]$. Vi söker alltså en funktion $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ så att $\sin^{-1}(\sin(x)) = x$ för alla $x$.

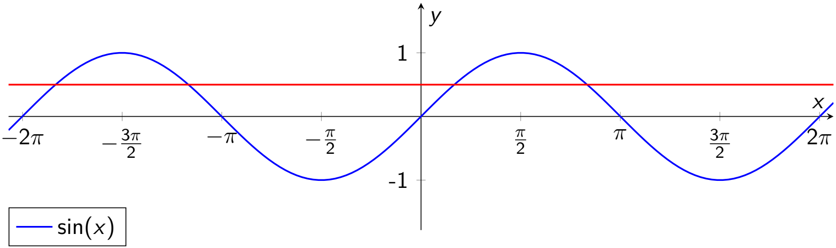



**Svar**: Nej, en sådan funktion existerar inte, för sinus är inte injektiv.

# Invers för sin($x$)

**Fråga**: Har sinusfuntionen en invers?

Vi har $D_{\sin} = \mathbb{R}$ och $V_{\sin} = [-1, 1]$. Vi söker alltså en funktion $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ så att $\sin^{-1}(\sin(x)) = x$ för alla $x$.



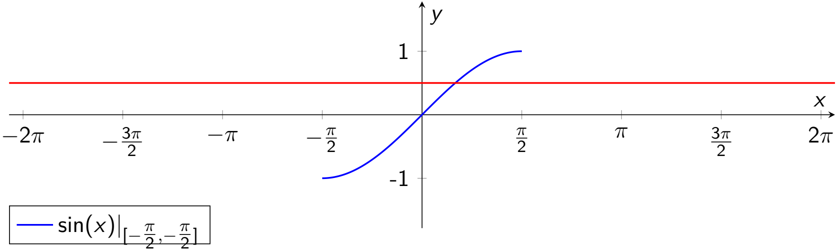

**Svar**: Nej, en sådan funktion existerar inte, för sinus är inte injektiv.

**Idé:** Vi begränsar definitionsmängden för sinus till $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Denna nya funktion är injektiv och har en invers som kallas arcsin($x$).

# Invers för $\sin(x)$

**Fråga**: Har sinusfuntionen en invers?

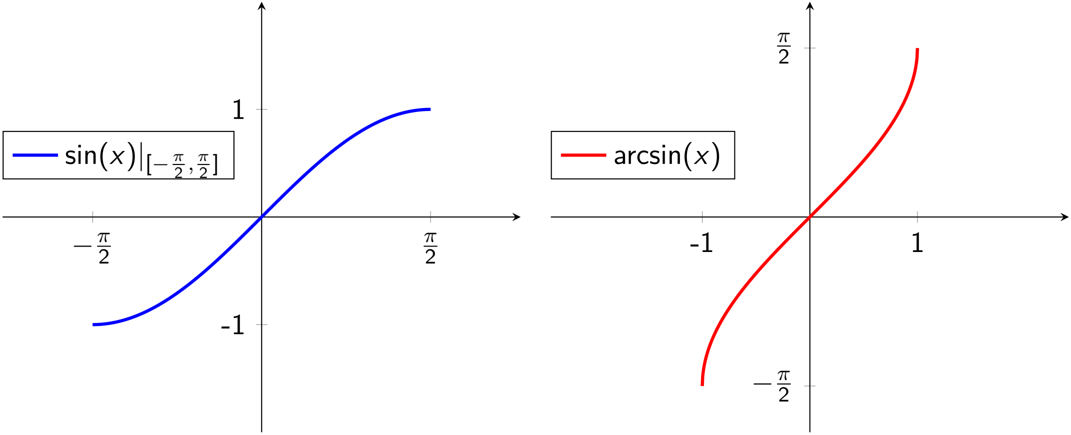
Vi har $D_{\sin} = \mathbb{R}$ och $V_{\sin} = [-1, 1]$. Vi söker alltså en funktion $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ så att $\sin^{-1}(\sin(x)) = x$ för alla $x$.




**Svar**: Nej, en sådan funktion existerar inte, för sinus är inte injektiv.

**Idé:** Vi begränsar definitionsmängden för sinus till $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Denna nya funktion är injektiv och har en invers som kallas $\arcsin(x)$.

# Begränsad sinus och dess invers arcsin

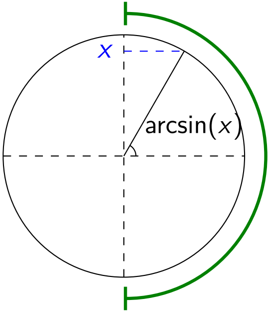


# Kom ihåg

Funktionen arcsin tar in ett värde mellan $-1$ och $1$, och ger ut den vinkel mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ som har det sinusvärdet.

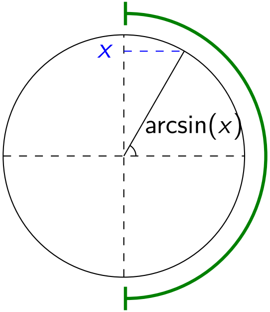
# Kom ihåg

Funktionen arcsin tar in ett värde mellan $-1$ och 1, och ger ut den vinkel mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ som har det sinusvärdet.



# Kom ihåg

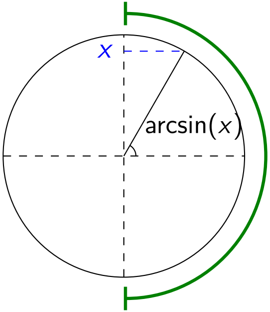
Funktionen arcsin tar in ett värde mellan $-1$ och 1, och ger ut den vinkel mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ som har det sinusvärdet.




För alla $-1 \leq x \leq 1$ gäller $\sin(\arcsin(x)) = x$

# Kom ihåg

Funktionen arcsin tar in ett värde mellan $-1$ och $1$, och ger ut den vinkel mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ som har det sinusvärdet.




För alla $-1 \leq x \leq 1$ gäller $\sin(\arcsin(x)) = x$

**Obs!**

Endast för $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gäller $\arcsin(\sin(x)) = x$

# Exempel

## Uppgift

1. Beräkna $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$
2. Beräkna $\sin(\arcsin(-\frac{2}{5}))$
3. Beräkna $\arcsin(\sin(\frac{7\pi}{4}))$
4. Beräkna $\arcsin(\sin(3))$

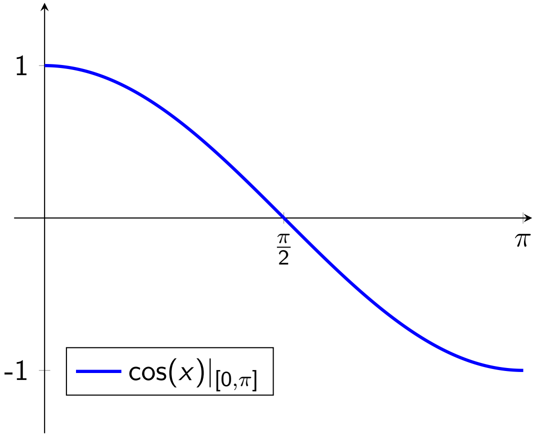
# Exempel

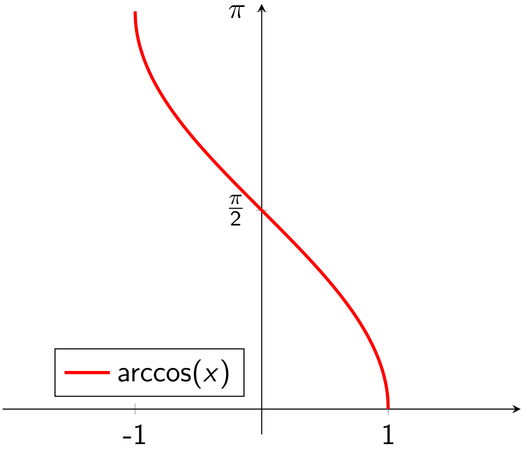
## Uppgift

1. Beräkna $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$
2. Beräkna $\sin(\arcsin(-\frac{2}{5}))$
3. Beräkna $\arcsin(\sin(\frac{7\pi}{4}))$
4. Beräkna $\arcsin(\sin(3))$

1. $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$
2. $\sin(\arcsin(-\frac{2}{5})) = -\frac{2}{5}$
3. $\arcsin(\sin(\frac{7\pi}{4})) = \arcsin(\sin(\frac{7\pi}{4} - 2\pi)) = \arcsin(\sin(-\frac{\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4}$
4. $\arcsin(\sin(3)) = \arcsin(\sin(\pi - 3)) = \pi - 3$ (eftersom $\pi - 3 \simeq 0.14 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

# Begränsad cosinus och dess invers arccos



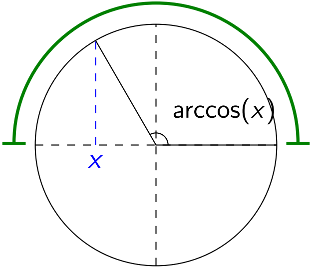



# Kom ihåg

Funktionen arccos tar in ett värde mellan $-1$ och $1$, och ger ut den vinkel mellan $0$ och $\pi$ som har det cosinusvärdet.

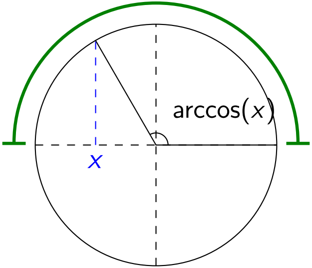
# Kom ihåg

Funktionen arccos tar in ett värde mellan $-1$ och 1, och ger ut den vinkel mellan 0 och $\pi$ som har det cosinusvärdet.



# Kom ihåg

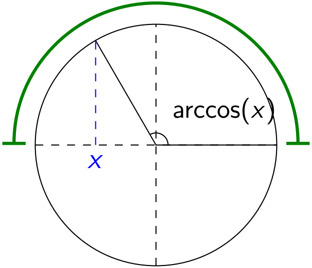
Funktionen arccos tar in ett värde mellan $-1$ och 1, och ger ut den vinkel mellan 0 och $\pi$ som har det cosinusvärdet.




För alla $-1 \leq x \leq 1$ gäller $\cos(\arccos(x)) = x$

# Kom ihåg

Funktionen arccos tar in ett värde mellan $-1$ och 1, och ger ut den vinkel mellan 0 och $\pi$ som har det cosinusvärdet.




För alla $-1 \leq x \leq 1$ gäller $\cos(\arccos(x)) = x$

**Obs!**

Endast för $x \in [0, \pi]$ gäller $\arccos(\cos(x)) = x$

# Exempel

## Uppgift

1. Beräkna $\arccos(\cos(30))$ ← OBS! 30 radianer
2. Beräkna $\cos(\arcsin(\frac{1}{3}))$
3. Beräkna $\arccos(-\sin(\frac{3\pi}{4}))$

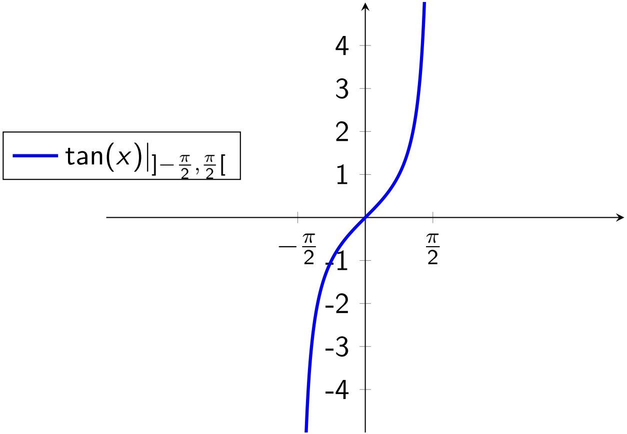
# Exempel

## Uppgift

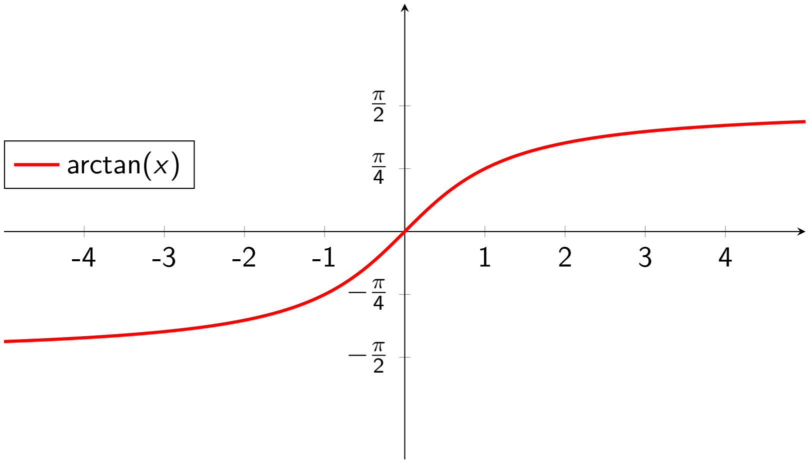
1. Beräkna $\arccos(\cos(30))$ ← OBS! 30 radianer
2. Beräkna $\cos(\arcsin(\frac{1}{3}))$
3. Beräkna $\arccos(-\sin(\frac{3\pi}{4}))$

1. $\arccos(\cos(30)) = \arccos(\cos(30-10\pi)) = \arccos(\cos(10\pi-30)) = 10\pi - 30$ (ty $0 < 10\pi - 30 < \pi$)
2. $y = \cos(\arcsin(\frac{1}{3})) \Rightarrow y^2 = \cos^2(\arcsin(\frac{1}{3})) = 1 - \sin^2(\arcsin(\frac{1}{3})) = 1 - (\frac{1}{3})^2 = \frac{8}{9}$. Eftersom $\frac{1}{3} > 0$ så är $0 < \arcsin(\frac{1}{3}) < \frac{\pi}{2}$, och därför är cosinus av denna vinkel positiv, alltså är $y = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
3. $\arccos(-\sin(\frac{3\pi}{4})) = \arccos(\sin(-\frac{3\pi}{4})) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - (-\frac{3\pi}{4}))) = \arccos(\cos(\frac{5\pi}{4})) = \arccos(\cos(-\frac{3\pi}{4})) = \arccos(\cos(\frac{3\pi}{4})) = \frac{3\pi}{4}$.

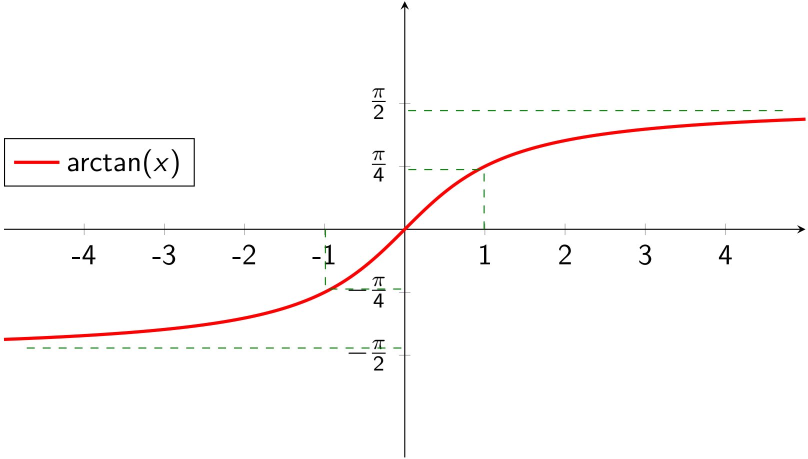
# Begränsad tangens och dess invers



# Begränsad tangens och dess invers



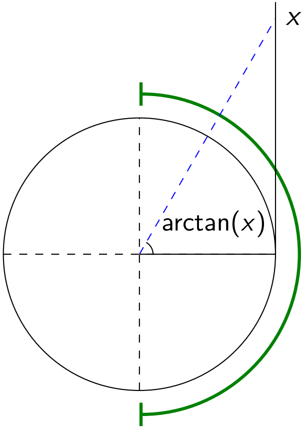
# Begränsad tangens och dess invers



# Kom ihåg

Funktionen arctan tar in ett värde i $\mathbb{R}$, och ger ut den vinkel mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ som har det tangensvärdet.

För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller $\tan(\arctan(x)) = x$



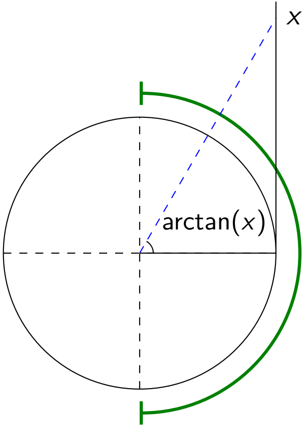
# Kom ihåg

Funktionen arctan tar in ett värde i $\mathbb{R}$, och ger ut den vinkel mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ som har det tangensvärdet.

För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller $\tan(\arctan(x)) = x$

**Obs!**

Endast för $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ gäller $\arctan(\tan(x)) = x$



# Kom ihåg

Funktionen arctan tar in ett värde i $\mathbb{R}$, och ger ut den vinkel mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ som har det tangensvärdet.

För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller $\tan(\arctan(x)) = x$

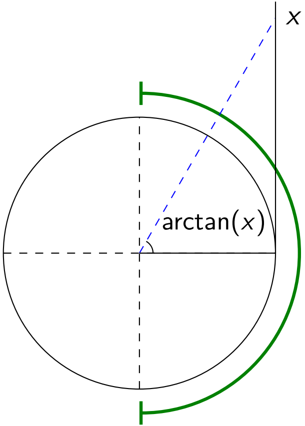
**Obs!**

Endast för $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ gäller $\arctan(\tan(x)) = x$

Exempel: $\arctan(\sqrt{3}) = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) =$

$\arctan\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})}\right) = \arctan(\tan(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$

$\arctan(\tan(-3)) = \arctan(\tan(-3+\pi)) = -3+\pi = \pi-3$



# Sammanfattning

## Kom ihåg

- $\arcsin(x)$ är invers till $\sin(x)|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$
- $\arccos(x)$ är invers till $\cos(x)|_{[0,\pi]}$
- $\arctan(x)$ är invers till $\tan(x)|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$

# Samband och formler

Udda funktioner har udda invers, och strängt växande funktioner har strängt växande invers, så

## Udda funktioner

- $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ (arcsin är udda)
- $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ (arctan är udda)
- $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$
- $\arcsin(x)$ och $\arctan(x)$ är strängt växande
- $\arccos(x)$ är strängt avtagande

# Samband och formler

Udda funktioner har udda invers, och strängt växande funktioner har strängt växande invers, så

## Udda funktioner

- $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ (arcsin är udda)
- $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ (arctan är udda)
- $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$
- $\arcsin(x)$ och $\arctan(x)$ är strängt växande
- $\arccos(x)$ är strängt avtagande

## Sats

- $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ för alla $-1 \leq x \leq 1$
- $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ för alla $x > 0$

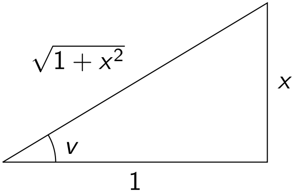
## Uppgift

Ta fram en formel för $\sin(\arctan(x))$. För vilka $x$ gäller formeln?

## Uppgift

Ta fram en formel för $\sin(\arctan(x))$. För vilka $x$ gäller formeln?

Vi ritar en triangel till hjälp, vi sätter basen till 1 och motstående katet till $x$ så att $\tan(v) = \frac{x}{1}$ och $v = \arctan(x)$. Hypotenusan fås då med Pythagoras.




Från triangeln får vi då direkt $\sin(\arctan(x)) = \sin(v) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Triangeln gäller för $x > 0$, men för $x < 0$ har vi $\sin(\arctan(x)) = -\sin(\arctan(-x)) = -(\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}}) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, så formeln gäller även för negativa $x$. Insättning visar att den även gäller för $x = 0$.

**Slutsats:** $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ för alla $x \in \mathbb{R}$

# Exempel

## Uppgift

Ange två tal $C$ och $v$ så att $4\cos(3x) - 7\sin(3x) = C\sin(3x + v)$.

# Exempel

## Uppgift

Ange två tal $C$ och $v$ så att $4\cos(3x) - 7\sin(3x) = C\sin(3x + v)$.

Högerledet kan skrivas $C\sin(3x)\cos(v) + C\cos(3x)\sin(v)$ Enligt standardmetoden kan vi ta $C = \sqrt{4^2 + (-7)^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. Vinkeln $v$ ska då uppfylla $5\sqrt{3}\cos(v) = -7$ och $5\sqrt{3}\sin(v) = 4$, vilket tillsammans ger $\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \frac{4}{-7}$, så vi kan ta
$v = \arctan(-\frac{4}{7}) = -\arctan(\frac{4}{7})$

**Svar:** Vi kan exempelvis ta $C = 5\sqrt{3}$ och $v = -\arctan(\frac{4}{7})$.

# Exempel

## Uppgift

Beräkna $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$.

# Exempel

## Uppgift

Beräkna $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$.

Vi vet att $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Låt $\alpha = \arctan(2) + \arctan(3)$. Då har vi:
$\tan(\alpha) = \frac{\tan(\arctan(2)) + \tan(\arctan(3))}{1 - \tan(\arctan(2))\tan(\arctan(3))} = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1$, så $\alpha = -\frac{\pi}{4} + n\pi$ för något $n$. Men vi vet att $\frac{\pi}{4} < arctan(2) < \frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{4} < arctan(2) < \frac{\pi}{2}$, så om vi adderar olikheterna får vi $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, så $n = 1$ och $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. Det sökta värdet är därför $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$

**Svar:** $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$

# Exempel

## Uppgift

Beräkna $\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$.

# Exempel

## Uppgift

Beräkna $\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$.

Låt $\alpha = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$. Additionsformeln för tangens ger att

$\tan(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$ så $\alpha = \frac{\pi}{4} + n\pi$, men $n$ måste vara 0 eftersom $0 < \alpha < \pi$

**Svar:** $\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}$

# Kuriosa

Formeln från förra sidan kan skrivas

$$\pi = 4\arctan(\frac{1}{2}) + 4\arctan(\frac{1}{3})$$

# Kuriosa

Formeln från förra sidan kan skrivas

$$\pi = 4\arctan(\frac{1}{2}) + 4\arctan(\frac{1}{3})$$

Här kan $\arctan(\frac{1}{2})$ approximeras med sina *Maclaurinutvecklingar*, exempelvis:

$$\arctan(\frac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2}) - \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{1}{2})^5}{5!} - \frac{(\frac{1}{2})^7}{7!} + \cdots$$

Detta ger en metod att approximera $\pi$, liknande metoder har använts för att beräkna miljontals decimaler i $\pi$.

# Kuriosa

Formeln från förra sidan kan skrivas

$$\pi = 4\arctan(\frac{1}{2}) + 4\arctan(\frac{1}{3})$$

Här kan $\arctan(\frac{1}{2})$ approximeras med sina *Maclaurinutvecklingar*, exempelvis:

$$\arctan(\frac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2}) - \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{1}{2})^5}{5!} - \frac{(\frac{1}{2})^7}{7!} + \cdots$$

Detta ger en metod att approximera $\pi$, liknande metoder har använts för att beräkna miljontals decimaler i $\pi$. John Machin bevisade en liknande formel redan år 1706: $\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{139})$ han lyckades beräkna 100 decimaler i $\pi$ med formeln

# Tack för idag!