# Grunk Föreläsning 9

## Funktioner av komplexa tal

Jonathan Nilsson

Linköpings Universitet

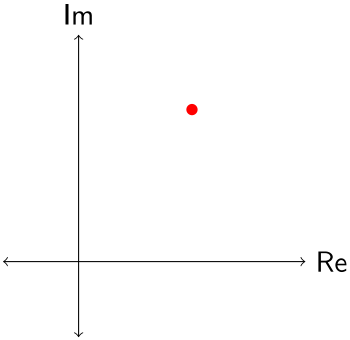
# Idag

- Komplexa tal
  - Polär form
  - Komplexa exponentialfunktionen
  - Binomiska ekvationer
  - Eulers formler

# Del I

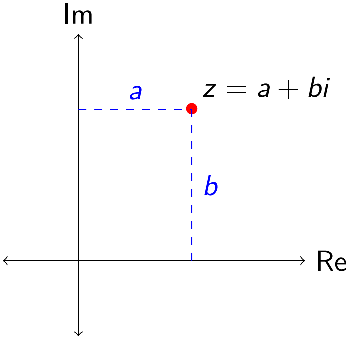
## Komplexa tal på polär form

# Polär form



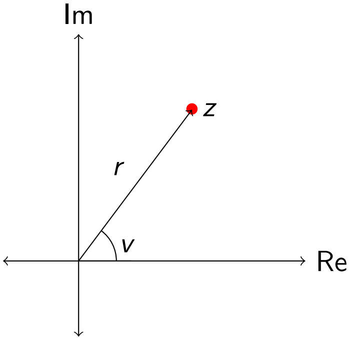

Ett komplext tal $z$

# Polär form




Ett komplext tal $z$ i normalform (rektangulär form) beskrivet med sin real- och imaginärdel.

# Polär form




Samma tal $z$ på **polär form**, beskrivet med sitt **belopp** $r = |z|$ och sitt **argument** $\arg(z) = v$.

# Från polär form till rektangulär form

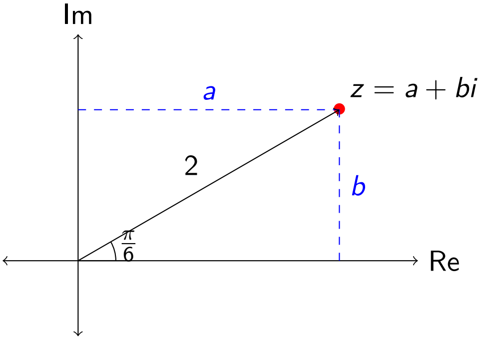
## Uppgift

Låt $|z| = 2$ och $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$. Skriv $z$ på form $a + bi$.

# Från polär form till rektangulär form

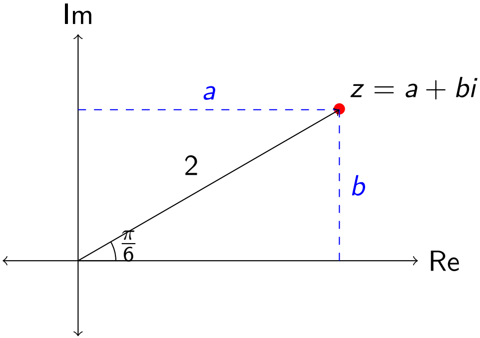
## Uppgift

Låt $|z| = 2$ och $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$. Skriv $z$ på form $a + bi$.



## Uppgift

Låt $|z| = 2$ och $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$. Skriv $z$ på form $a + bi$.




Enligt bilden har vi $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{b}{2}$ och $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{b}{2}$, så $z = a + bi = 2\cos(\frac{\pi}{6}) + i2\sin(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i$.

# Polär till rektangulär

Samma resonemang fungerar för godtyckliga komplexa tal.

**Slutsats**

Om ett komplext tal $z$ har belopp $r$ och argument $v$, så har vi

$$z = r\big(\cos(v) + i\sin(v)\big)$$

# Från rektangulär till polär

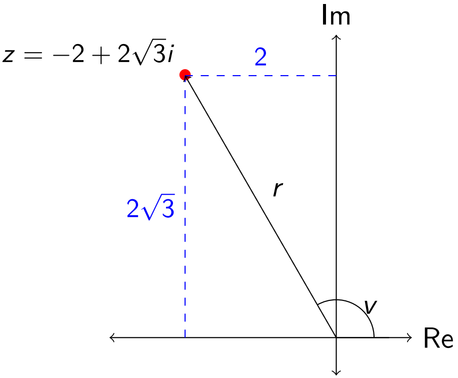
## Uppgift

Låt $z = -2 + 2\sqrt{3}i$. Ange belopp och argument $(r, v)$ för talet $z$.

# Från rektangulär till polär

## Uppgift

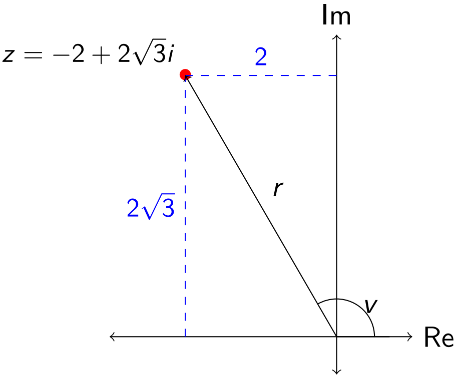
Låt $z = -2 + 2\sqrt{3}i$. Ange belopp och argument $(r, v)$ för talet $z$.



# Från rektangulär till polär

## Uppgift

Låt $z = -2 + 2\sqrt{3}i$. Ange belopp och argument $(r, v)$ för talet $z$.



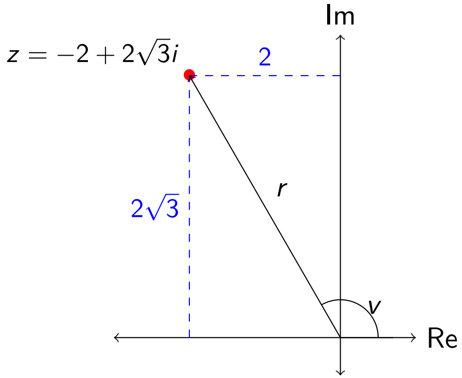

Beloppet är lätt att beräkna:

$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4.$

# Från rektangulär till polär

## Uppgift

Låt $z = -2 + 2\sqrt{3}i$. Ange belopp och argument $(r, v)$ för talet $z$.




Beloppet är lätt att beräkna:
$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4.$
Enligt bilden har vi också
$\tan(\pi - v) = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, så
$\pi - v = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. Alltså blir $v = \frac{2\pi}{3}$.
**Svar:** De polära koordinaterna för $z$ är
$(r, v) = (4, \frac{2\pi}{3})$.

# Rektangulär till polär

Samma resonemang fungerar för godtyckliga komplexa tal.

**Slutsats**

Om ett komplext tal $z = a + bi$ med positiv realdel $a > 0$ så ges de polära koordinaterna för $z$ av $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ och $v = \arctan(\frac{b}{a})$

(När $a \leq 0$ är det bäst att rita en figur och resonera sig fram som i föregående exempel)

# Multiplikation av tal på polär form

Låt $z_1$ ha belopp $r_1$ och argument $v_1$, och låt $z_2$ ha belopp $r_2$ och argument $v_2$.

# Multiplikation av tal på polär form

Låt $z_1$ ha belopp $r_1$ och argument $v_1$, och låt $z_2$ ha belopp $r_2$ och argument $v_2$.Då har vi

$$z = r_1(\cos(v_1) + i\sin(v_1)) \quad \text{och} \quad z_2 = r_2(\cos(v_2) + i\sin(v_2))$$

så $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(v_1) + i\sin(v_1))(\cos(v_2) + i\sin(v_2)) =$
$r_1 r_2\big(\cos(v_1)\cos(v_2) + i\cos(v_1)\sin(v_2) + i\sin(v_1)\cos(v_2) - \sin(v_1)\sin(v_2)\big)$
$= r_1 r_2\big((\cos(v_1)\cos(v_2) - \sin(v_1)\sin(v_2)) + i(\cos(v_1)\sin(v_2) + \sin(v_1)\cos(v_2))\big) =$
$r_1 r_2\big(\cos(v_1 + v_2) + i\sin(v_1 + v_2)\big)$
Så produkten $z_1 \cdot z_2$ har belopp $r_1 \cdot r_2$ och argument $v_1 + v_2$.

# Multiplikation av tal på polär form

Låt $z_1$ ha belopp $r_1$ och argument $v_1$, och låt $z_2$ ha belopp $r_2$ och argument $v_2$.Då har vi

$$z = r_1(\cos(v_1) + i\sin(v_1)) \quad \text{och} \quad z_2 = r_2(\cos(v_2) + i\sin(v_2))$$

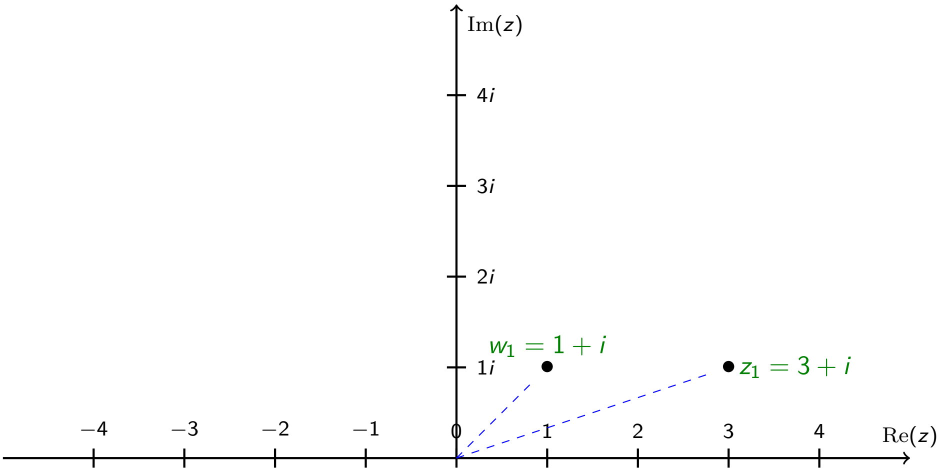
så $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(v_1) + i\sin(v_1))(\cos(v_2) + i\sin(v_2)) =$
$r_1 r_2\big(\cos(v_1)\cos(v_2) + i\cos(v_1)\sin(v_2) + i\sin(v_1)\cos(v_2) - \sin(v_1)\sin(v_2)\big)$
$= r_1 r_2\big((\cos(v_1)\cos(v_2) - \sin(v_1)\sin(v_2)) + i(\cos(v_1)\sin(v_2) + \sin(v_1)\cos(v_2))\big) =$
$r_1 r_2\big(\cos(v_1 + v_2) + i\sin(v_1 + v_2)\big)$
Så produkten $z_1 \cdot z_2$ har belopp $r_1 \cdot r_2$ och argument $v_1 + v_2$.

**Minnesregel**

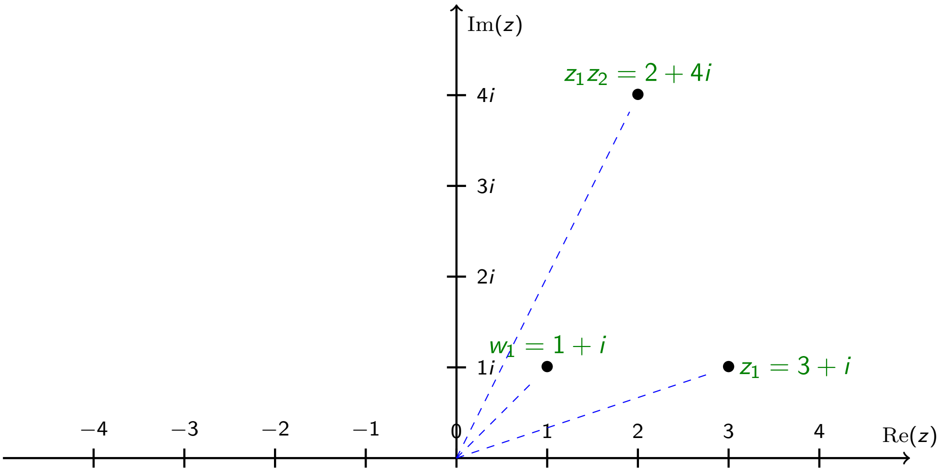
När två komplexa tal på polär form multipliceras så multipliceras beloppen, och argumenten adderas.

# Visualisering

Beloppen multipliceras, argumenten adderas



Beloppen multipliceras, argumenten adderas



# Räkneregler för belopp och argument

## Räkneregler

- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
- $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$
- $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$
- $\arg(\frac{z}{w}) = \arg(z) - \arg(w)$

# Räkneregler för belopp och argument

## Räkneregler

- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
- $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$
- $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$
- $\arg(\frac{z}{w}) = \arg(z) - \arg(w)$

## Obs!

Notera att ett komplext tal har flera olika argument. Exempelvis kan vi skriva både $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ och $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$ (båda är ”samma vinkel” men de skiljer sig med ett varv). Man kan säga att $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, där $n \in \mathbb{Z}$, så arg är strikt talat inte en funktion - den antar flera värden samtidigt. Normalt brukar man dock ange argument på intervallet $[0, 2\pi[$ eller $]-\pi, \pi]$.

# Exempel

## Uppgift

Ange belopp och ett argument för $z = \frac{(1+i)^6(1+\sqrt{3}i)}{(1-i)5i}$

# Exempel

## Uppgift

Ange belopp och ett argument för $z = \frac{(1+i)^6(1+\sqrt{3}i)}{(1-i)5i}$

$$|z| = \left|\frac{(1+i)^6(1+\sqrt{3}i)}{(1-i)5i}\right| = \frac{|1+i|^6\cdot|1+\sqrt{3}i|}{|1-i|\cdot|5i|} = \frac{\sqrt{2}^6\cdot 2}{\sqrt{2}\cdot 5} = \frac{16}{5\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$$

$$\arg(z) = 6\arg(1+i) + \arg(1+\sqrt{3}i) - \arg(1-i) - arg(5i)$$

$$= 6\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{2} = \frac{(18+4+3-6)\pi}{12} = \frac{19\pi}{12}.$$

Del II

# Den komplexa exponentialfunktionen

# Den komplexa exponentialfunktionen

Funktionen $f(x) = e^x$ är hittills bara definierad för reella $x$. Hur ska man definiera $e^z$ när $z$ är komplext? Vi vill att samma räkneregler ska gälla som för den vanliga exponentialfunktionen.

# Den komplexa exponentialfunktionen

Funktionen $f(x) = e^x$ är hittills bara definierad för reella $x$. Hur ska man definiera $e^z$ när $z$ är komplext? Vi vill att samma räkneregler ska gälla som för den vanliga exponentialfunktionen.

**Definition**

Om $x$ är reellt definierar vi

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

# Den komplexa exponentialfunktionen

Funktionen $f(x) = e^x$ är hittills bara definierad för reella $x$. Hur ska man definiera $e^z$ när $z$ är komplext? Vi vill att samma räkneregler ska gälla som för den vanliga exponentialfunktionen.

**Definition**

Om $x$ är reellt definierar vi

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

För att räkneregeln $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ ska gälla måste vi då definiera

$$e^{a+bi} = e^a\big(\cos(b) + i\sin(b)\big)$$

# Polär form med exponentialfunktion

## Polär form

Om $|z|$ och $\arg(z) = v$ så har vi

$$z = re^{iv} = r(\cos(v) + i\sin(v))$$

Eftersom $z$ här representeras med belopp och argument kallas bägge uttrycken till höger i likekheten för **polär form** för $z$.

# Polär form med exponentialfunktion

## Polär form

Om $|z|$ och $\arg(z) = v$ så har vi

$$z = re^{iv} = r(\cos(v) + i\sin(v))$$

Eftersom $z$ här representeras med belopp och argument kallas bägge uttrycken till höger i likekheten för **polär form** för $z$.

Observationer:

- $|e^{iv}| = |\cos(v) + i\sin(v)| = \sqrt{\cos^2(v) + \sin^2(v)} = 1$ för alla reella $v$, så $e^{iv}$ ligger på enhetscirkeln i komplexa talplanet.

# Polär form med exponentialfunktion

## Polär form

Om $|z|$ och $\arg(z) = v$ så har vi

$$z = re^{iv} = r(\cos(v) + i\sin(v))$$

Eftersom $z$ här representeras med belopp och argument kallas bägge uttrycken till höger i likekheten för **polär form** för $z$.

Observationer:

- $|e^{iv}| = |\cos(v) + i\sin(v)| = \sqrt{\cos^2(v) + \sin^2(v)} = 1$ för alla reella $v$, så $e^{iv}$ ligger på enhetscirkeln i komplexa talplanet.
- $e^{iv} = \cos(v) + i\sin(v) = \cos(v + 2n\pi) + i\sin(v + 2n\pi) = e^{iv+2ni\pi}$ för reella $v$

# Polär form med exponentialfunktion

## Polär form

Om $|z|$ och $\arg(z) = v$ så har vi

$$z = re^{iv} = r(\cos(v) + i\sin(v))$$

Eftersom $z$ här representeras med belopp och argument kallas bägge uttrycken till höger i likekheten för **polär form** för $z$.

Observationer:

- $|e^{iv}| = |\cos(v) + i\sin(v)| = \sqrt{\cos^2(v) + \sin^2(v)} = 1$ för alla reella $v$, så $e^{iv}$ ligger på enhetscirkeln i komplexa talplanet.
- $e^{iv} = \cos(v) + i\sin(v) = \cos(v + 2n\pi) + i\sin(v + 2n\pi) = e^{iv+2ni\pi}$ för reella $v$
- $(r_1e^{iv_1})(r_2e^{iv_2}) = r_1r_2e^{i(v_1+v_2)}$,

# Exempel

## Uppgift

Beräkna $(1+i)^{100}$.

# Exempel

## Uppgift

Beräkna $(1+i)^{100}$.

Vi uttrycker $1+i$ på polär form: $|1+i| = \sqrt{2}$ och $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, så
$(1+i)^{100} = (\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}})^{100} = (2^{1/2})^{100} e^{\frac{100\pi i}{4}} = 2^{50}e^{25\pi i} = 2^{50}e^{\pi i} = -2^{50}$.

Del III

# Binomiska ekvationer

## Uppgift

Lös ekvationen $z^3 = 8i$. Svara på form $a + bi$.

## Uppgift

Lös ekvationen $z^3 = 8i$. Svara på form $a + bi$.

Vi skriver båda sidor på polär form. Vi har då $z = re^{iv}$ på polär form där vi söker $r$ och $v$:

$$(re^{iv})^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow r^3 e^{i3v} = 8e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

För att likhet ska råda måste beloppen vara lika, och argumenten måste vara lika (upp till en multipel av $2\pi$):

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3v = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ v = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3} \end{cases} .$$

För $n = 0, 1, 2$ får vi tre olika argument $v$: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$, men när $n = 3$ får vi åter $\frac{\pi}{6}$, och vinklarna upprepar sig. Det finns alltså bara tre *olika*. Slutligen går vi tillbaka till form $a + bi$ och får

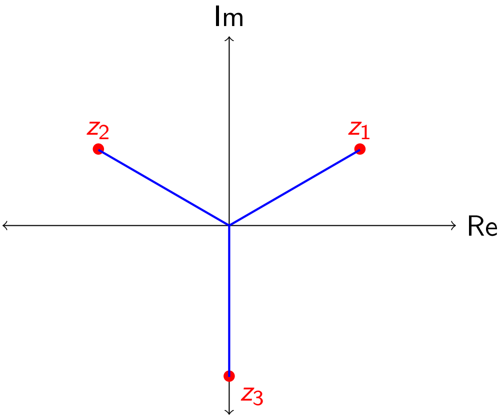
**Svar:** Ekvationen har tre lösningar:

$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})) = \sqrt{3} + i$

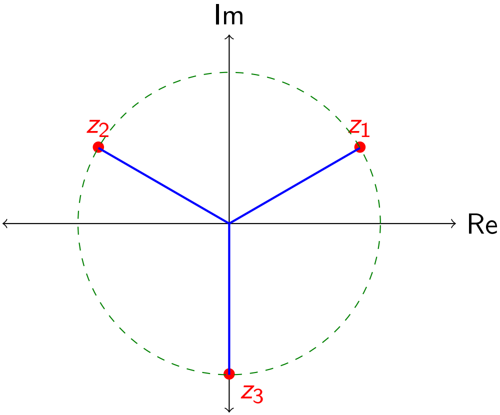
$z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})) = -\sqrt{3} + i$

$z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})) = -2i$

# Lösningarna i talplanet



# Lösningarna i talplanet




Notera att lösningarna ligger på en cirkel i talplanet!

# Binomiska ekvationer

## Definition

En ekvation av typen

$$z^n = c$$

där $n$ är ett givet heltal och $c$ är ett givet komplext tal, kallas för en **binomisk ekvation**.

# Binomiska ekvationer

## Definition

En ekvation av typen

$$z^n = c$$

där $n$ är ett givet heltal och $c$ är ett givet komplext tal, kallas för en **binomisk ekvation**.

Sådana ekvationer kan lösas genom att först skriva båda sidor på polär form. Om $c = re^{iv}$ så ges ekvationens lösningar av

$$z = r^{1/n} e^{i\frac{v+2\pi k}{n}} \text{ där } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

De $n$ stycken lösningarna ligger jämnt utspridda på en cirkel med centrum i origo i komplexa talplanet.

# Binomiska ekvationer

## Definition

En ekvation av typen

$$z^n = c$$

där $n$ är ett givet heltal och $c$ är ett givet komplext tal, kallas för en **binomisk ekvation**.

Sådana ekvationer kan lösas genom att först skriva båda sidor på polär form. Om $c = re^{iv}$ så ges ekvationens lösningar av

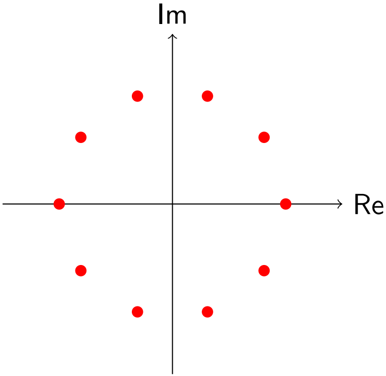
$$z = r^{1/n} e^{i\frac{v+2\pi k}{n}} \text{ där } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

De $n$ stycken lösningarna ligger jämnt utspridda på en cirkel med centrum i origo i komplexa talplanet.

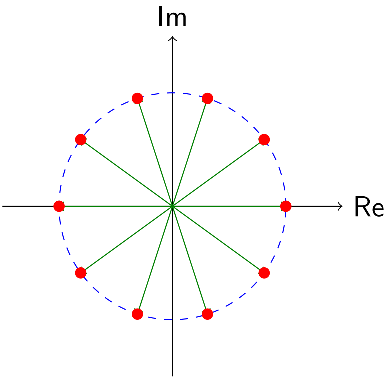
## Tips!

Det är bäst att lära sig metoden istället för formeln ovan.

# Lösningarna till $z^{10} = 1$



# Lösningarna till $z^{10} = 1$



## Uppgift

Lös ekvationen $(z - 2 + i)^5 = 2 + 2\sqrt{3}i$.

## Uppgift

Lös ekvationen $(z-2+i)^5 = 2+2\sqrt{3}i$.

Sätt $z-2+i = re^{iv}$, och skriv $2+2\sqrt{3}i = 4(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i) = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$. Vänsterledet blir

$$(re^{iv})^5 = 4e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow r^5 e^{i5v} = 4e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^5 = 4 \\ 5v = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 4^{\frac{1}{5}} \\ v = \frac{\pi}{30} + \frac{2n\pi}{5} \end{cases}.$$

För $n = 0,1,2,3,4$ får vi 5 olika argument $v$: $\frac{\pi}{30}$, $\frac{13\pi}{30}$, $\frac{25\pi}{30}$, $\frac{37\pi}{30}$, $\frac{49\pi}{30}$, men när $n=5$ får vi åter $\frac{\pi}{30}$, och vinklarna upprepar sig. Det finns alltså bara fem *olika* argument. Slutligen går vi tillbaka till variabeln $z = 2-i+re^{iv} = 2+r\cos(v)+i(-1+r\sin(v))$:

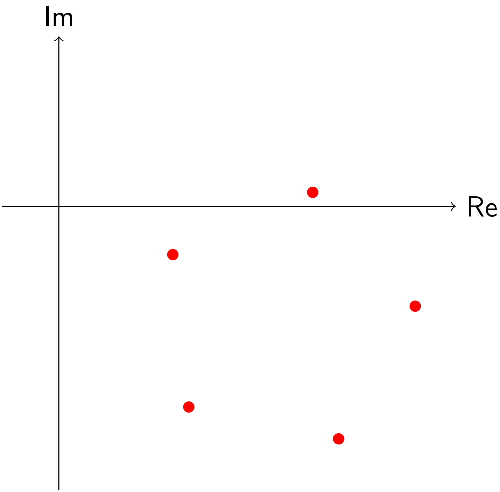
**Svar:** Ekvationen har fem lösningar:

$z_1 = 2+\sqrt[5]{4}\cos(\frac{\pi}{30})+i(-1+\sqrt[5]{4}\sin(\frac{\pi}{30}))$ $z_2 = 2+\sqrt[5]{4}\cos(\frac{13\pi}{30})+i(-1+\sqrt[5]{4}\sin(\frac{13\pi}{30}))$

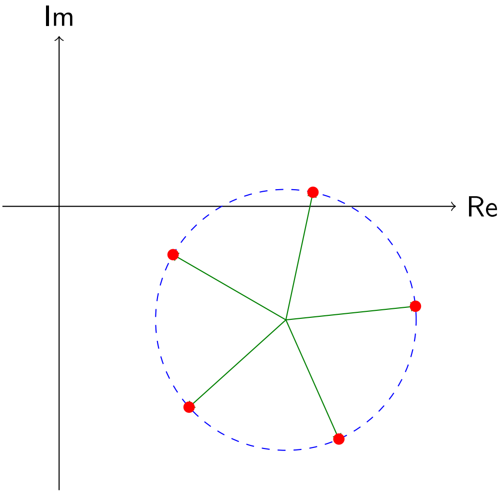
$z_3 = 2+\sqrt[5]{4}\cos(\frac{25\pi}{30})+i(-1+\sqrt[5]{4}\sin(\frac{25\pi}{30}))$ $z_4 = 2+\sqrt[5]{4}\cos(\frac{37\pi}{30})+i(-1+\sqrt[5]{4}\sin(\frac{37\pi}{30}))$

$z_5 = 2+\sqrt[5]{4}\cos(\frac{49\pi}{30})+i(-1+\sqrt[5]{4}\sin(\frac{49\pi}{30}))$

# Lösningarna till $(z-2+i)^5 = 2+\sqrt{3}i$



# Lösningarna till $(z-2+i)^5 = 2+\sqrt{3}i$



Del IV

# Eulers formler

# Eulers formler

Vi har sett att expontentialfunktionen kan uttryckas med sinus och cosinus: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Faktum är att det omvända också gäller.

## Eulers formler

Vi har $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ och $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

# Eulers formler

Vi har sett att expontentialfunktionen kan uttryckas med sinus och cosinus: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Faktum är att det omvända också gäller.

**Eulers formler**

Vi har $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ och $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

**Bevis:** Insättning, notera att $e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos(x) - i\sin(x)$ eftersom cosinus är jämn och sinus är udda.

# Exempel

## Uppgift

Uttryck $\sin^3(x)$ som en summa av trigonometriska funktioner utan potenser.

# Exempel

## Uppgift

Uttryck $\sin^3(x)$ som en summa av trigonometriska funktioner utan potenser.

Vi använder Eulers formler och förenklar med hjälp av $(a-b)^3 = a^3 b - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$:

$$\sin^3(x) = \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^3}{(2i)^3} = \frac{e^{3ix}-3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}-e^{-3ix}}{-4\cdot 2i} = -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} - 3\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) = -\frac{\sin(3x)}{4} + \frac{3\sin(x)}{4}.$$

**Svar:** $\sin^3(x) = -\frac{\sin(3x)}{4} + \frac{3\sin(x)}{4}$

# Exempel

## Uppgift

Uttryck $\sin^3(x)$ som en summa av trigonometriska funktioner utan potenser.

Vi använder Eulers formler och förenklar med hjälp av $(a-b)^3 = a^3b - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$:

$$\sin^3(x) = \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^3}{(2i)^3} = \frac{e^{3ix}-3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}-e^{-3ix}}{-4\cdot 2i} = -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} - 3\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) = -\frac{\sin(3x)}{4} + \frac{3\sin(x)}{4}.$$

**Svar:** $\sin^3(x) = -\frac{\sin(3x)}{4} + \frac{3\sin(x)}{4}$

**Tips:** För att testa om formeln troligtvis stämmer kan man sätta in exempelvis $x=0$ eller $x = \frac{\pi}{4}$.

Formeln är användbar om man exempelvis ska integrera $\sin^3(x)$ - mer om detta i kommande kurser.

# Exempel

## Uppgift

Uttryck $\sin^3(x)$ som en summa av trigonometriska funktioner utan potenser.

Vi använder Eulers formler och förenklar med hjälp av $(a-b)^3 = a^3b - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$:

$$\sin^3(x) = \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^3}{(2i)^3} = \frac{e^{3ix}-3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}-e^{-3ix}}{-4\cdot 2i} = -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} - 3\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) = -\frac{\sin(3x)}{4} + \frac{3\sin(x)}{4}.$$

**Svar:** $\sin^3(x) = -\frac{\sin(3x)}{4} + \frac{3\sin(x)}{4}$

**Tips:** För att testa om formeln troligtvis stämmer kan man sätta in exempelvis $x = 0$ eller $x = \frac{\pi}{4}$.

Formeln är användbar om man exempelvis ska integrera $\sin^3(x)$ - mer om detta i kommande kurser.

# Eulers formler och trigonometriska samband

**Tips!**

Eulers formler kan användas för att minnas trigonometriska samband!

# Eulers formler och trigonometriska samband

**Tips!**

Eulers formler kan användas för att minnas trigonometriska samband!

Säg att vi vill minnas vad $\cos(\frac{\pi}{2} - v)$ blir

**Tips!**

Eulers formler kan användas för att minnas trigonometriska samband!

Säg att vi vill minnas vad $\cos(\frac{\pi}{2} - v)$ blir, vi kan då skriva:

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - v) = \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-v)} + e^{-i(\frac{\pi}{2}-v)}}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-iv} + e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{iv}}{2}$$

$$= \frac{ie^{-iv} - ie^{iv}}{2} = \frac{-e^{-iv} + e^{iv}}{2i} = \sin(v)$$

# Tack för idag!