KORTFATTAT LÖSNINGSFÖRSLAG, DUGGA 1, 20211002
91/92MA13 TATB03

1. a) $x^2+y^2-6x+4y-12=0 \Leftrightarrow (x-3)^2-9+(y+2)^2-4-12=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-(-2))^2=5^2$,

vilket visar att ekvationen beskriver en cirkel med medelpunkt i $(3,-2)$ och radie 5.

b) $\displaystyle\sum_{k=-5}^{11} \frac{5+3k}{2} = \Big\|$ Aritmetisk summa: 1:a term: $(5+3(-5))/2=-5$; Sista term: $(5+3\cdot 11)/2=19$; Antal termer: 17 st $\Big\| = \frac{-5+19}{2}\cdot 17 = 7\cdot 17 = \underline{\underline{119}}$

c) $\overline{z} = \overline{\frac{1+3i}{-4-2i}-3i} = \overline{\frac{(1+3i)(-4+2i)}{(-4-2i)(-4+2i)}-3i} = \overline{\frac{-10-10i}{20}-3i} = \overline{-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i}}$

SVAR: a) Radie 5 & medelpunkt $(3,-2)$; b) Summa blir 119; c) $\overline{z}=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$

2. $\sqrt{9-2x}-7=-2x \Leftrightarrow \sqrt{9-2x}=7-2x \Rightarrow 9-2x=(7-2x)^2=49-28x+4x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2-26x+40=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{13}{2}x+10=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{13}{4}\right)^2-\frac{169}{16}+\frac{160}{16}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{13}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{13}{4}-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{13}{4}+\frac{3}{4}\right)=0 \Leftrightarrow (x-4)\left(x-\frac{5}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=4$ eller $x=\frac{5}{2}$.

Kontroll: $V.L._{x=4}=\sqrt{9-2\cdot 4}-7=\sqrt{1}-7=-6 \neq -8=-2\cdot 4=H.L._{x=4}$ $\therefore$ $x=4$ FALSK

$V.L._{x=5/2}=\sqrt{9-2\cdot\frac{5}{2}}-7=\sqrt{4}-7=-5=-2\cdot\frac{5}{2}=H.L._{x=5/2}$ $\therefore$ $x=5/2$ OK

SVAR: $x=\frac{5}{2}$ löser ekvationen $\sqrt{9-2x}-7=-2x$.

3. $\frac{2x-2}{1-x} \leq \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \Big\|$ OBS: olikheten ej def. för $x=\pm 1$ $\Big\| \Leftrightarrow \frac{2x-2}{1-x}-\frac{x}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\overset{=(-1)(1-x)}{2(x-1)}(x+1)-x(1-x)}{(1-x)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x+1)-x}{(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-2}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+2/3}{x+1} \geq 0$. Teckentabellen

		-1		$-2/3$		1	
$x+2/3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{x+2/3}{x+1}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$

visar att olikheten gäller då $x<-1$ eller $-\frac{2}{3}\leq x<1$ eller $x>1$.

SVAR: Olikheten gäller då $x<-1$ eller $-\frac{2}{3}\leq x<1$ eller $x>1$

FORTS. KORTFATTAT LÖSNINGSFÖRSLAG, DUGGA 1, 20211002 91/92MA13 TATB03

4. $iz^2-(1+3i)z=1-8i \iff -iz^2+(1+3i)z+1-8i=0 \iff z^2+(-3+i)z+8+i=0$

$$\iff \left(z+\frac{(-3+i)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\underbrace{(-3+i)^2}_{=9-6i+i^2=8-6i}+8+i=0 \iff \left(z-\frac{3-i}{2}\right)^2-2+\frac{3}{2}i+8+i=0$$

$$\iff \left(z-\frac{3-i}{2}\right)^2-\left(-6-\frac{5}{2}i\right)=0 \iff$$

// sök $w=a+ib$ där $a,b\in\mathbb{R}$ och sådan att $w^2=-6-\frac{5}{2}i$, dvs

$$-6-\frac{5}{2}i=w^2=(a+ib)^2=a^2+i2ab-b^2 \iff \begin{cases} a^2-b^2=-6 & (1)\\ 2ab=-\frac{5}{2} & (2)\end{cases}$$ samt då

$$\left|-6-\frac{5}{2}i\right|=|w^2|=|w|^2=a^2+b^2 \iff a^2+b^2=\sqrt{(-6)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{36+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{169}{4}}=\frac{13}{2} \quad (3)$$

(1) + (3) ger $2a^2=-6+\frac{13}{2}=\frac{1}{2} \iff a^2=\frac{1}{4} \iff a=\pm\frac{1}{2}$,

vilket i (2) ger $b=\mp\frac{5}{2}$, dvs $w=\pm\left(\frac{1}{2}\mp\frac{5}{2}i\right)$ // $\iff$

$$\iff 0=\left(z-\frac{3-i}{2}\right)^2-\left(\pm\left(\frac{1}{2}\mp\frac{5}{2}i\right)\right)^2=\left(\left(z-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right)-\left(\pm\frac{1}{2}\mp\frac{5}{2}i\right)\right)\left(\left(z-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right)+\left(\pm\frac{1}{2}\mp\frac{5}{2}i\right)\right)=$$

$$=\left(z-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i\right)\left(z-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i\right)=(z-2+3i)(z-1-2i) \iff$$

$\iff z=2-3i$ eller $z=1+2i$

SVAR: $z=2-3i$ eller $z=1+2i$

5. Observera först att ekvationen endast har lösningar för $A\geq 0$.

$$|12-5x-2x^2|=A \iff \pm A=12-5x-2x^2=-2\left(x^2+\frac{5}{2}x-6\right) \iff$$

$$\iff \pm A=-2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}-6\right)=-2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{121}{16}\right) \iff$$

$$\iff \left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}\mp\frac{A}{2} \iff x=-\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{121\mp 8A}{16}}$$

Detta visar att $A=0$ ger precis <u>två</u> lösningar; $0<8A<121$ ger <u>fyra</u> lösningar (två från $+8A$ & två från $-8A$; $8A=121$ ger precis <u>tre</u> lösningar; och $8A>121$ ger <u>två</u> lösningar

SVAR:

$A<0$: Inga lösningar

$A=0$: Två lösningar

$0<A<\frac{121}{8}$: Fyra lösningar

$A=\frac{121}{8}$: Tre lösningar

$A>\frac{121}{8}$: Två lösningar

Skiss: