Kortfattat lösningsförslag, Dugga 1, 20211016

91/92MA13
TATB03

1. a) $$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2-y^2}{xy}}{\frac{x+y}{xy}} = \frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} = x-y \text{ då } \begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \\ x+y\neq 0 \end{cases}$$

b) $$\sum_{k=0}^{21}\left(2+2^{-k}\right) = \sum_{k=0}^{21} 2 + \sum_{k=0}^{21} 2^{-k} =$$ // antalet termer är 22st. 2:a summan är geometrisk med 1:a term 1 & kvot 2^{-1} // $$= 2\cdot 22 + 1\cdot\frac{1-(2^{-1})^{22}}{1-2^{-1}}$$

$$= 44 + 2\left(1-2^{-22}\right) = 46-2^{-21}$$

c) $$2x^2-x+5 = 2\left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right) = 2\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 \overbrace{-\frac{1}{16}+\frac{5}{2}}^{=\frac{39}{16}}\right) = 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{8},$$

vilket blir som minst då $x=\frac{1}{4}$ och uttrycket blir då $\frac{39}{8}$ (ty $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 \geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ med likhet för $x=\frac{1}{4}$).

Svar: $39/8$

2. $$x \geq \frac{x+4}{x+1} \iff 0 \geq \frac{x+4}{x+1} - x = \frac{x+4-x(x+1)}{x+1} = \frac{-x^2+4}{x+1} = -\frac{(x+2)(x-2)}{x+1} \iff$$

$$\iff \frac{(x+2)(x-2)}{x+1} \geq 0$$

Teckentabell:

x		-2		-1		2	
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{(x-2)(x+2)}{x+1}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$\therefore$ Teckentabellen visar att olikheten gäller för $-2 \leq x < -1$ och $x \geq 2$

3. $$2|1-2x| + |x-2| = 6+x \quad (*)$$

$$|1-2x| = \begin{cases} 1-2x & \text{om } 1-2x \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{2} \\ -(1-2x) & \text{om } 1-2x \leq 0 \iff x \geq \frac{1}{2} \end{cases} ; \quad |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{om } x-2 \geq 0 \iff x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{om } x-2 \leq 0 \iff x \leq 2 \end{cases}$$

$\therefore$ Vi får 3 olika fall: Fall I | $1/2$ | Fall II | 2 | Fall III

Fall I, $x \leq 1/2$: $(*) \iff 2(1-2x)-(x-2) = 6+x \iff x = -1/3$ $\therefore$ OK, ligger i intervallet! Lösning!

Fall II, $1/2 \leq x \leq 2$: $(*) \iff -2(1-2x)-(x-2) = 6+x \iff x = 3$ $\therefore$ ligger ej i intervallet så ej lösning till $(*)$

Fall III, $x \geq 2$: $(*) \iff -2(1-2x)+(x-2) = 6+x \iff x = 5/2$ $\therefore$ OK, ligger i intervallet! Lösning!

Svar: $x = -\frac{1}{3}$ och $x = \frac{5}{2}$ löser ekvationen $(*)$

FORTS. KORTFATTAT LÖSNINGSFÖRSLAG, DUGGA 1, 20211016 91 92MA13 TATB03

4. $p(-2i) = 2\cdot(-2i)^4 - 4\cdot(-2i)^3 + 2\cdot(-2i)^2 - 16\cdot(-2i) - 24 =$

$= 2\cdot 2^4 \cdot \underbrace{i^4}_{=1} + 4\cdot 2^3 \cdot \underbrace{i^3}_{=-i} + 2\cdot 2^2 \cdot \underbrace{i^2}_{=-1} + 32i - 24 =$

$= 32 - 32i - 8 + 32i - 24 = 0$ // V.S.V.

Då $p(-2i) = 0$ är $(z-(-2i)) = (z+2i)$ en faktor i polynomet

$p(z) = 2z^4 - 4z^3 + 2z^2 - 16z - 24 = 2(z^4 - 2z^3 + z^2 - 8z - 12)$.

Vidare, då $p(z)$ endast har reella koefficienter är även $(z-2i)$ en faktor i $p(z)$. Polynomdivision, $p(z)$ divideras med $(z+2i)(z-2i) = z^2+4$,

ger $p(z) = 2\cdot(z+2i)(z-2i)(z^2-2z-3) = 2(z+2i)(z-2i)(z+1)(z-3)$.

SVAR: $p(z)$ faktoriserat så långt som möjligt kan skrivas

$p(z) = 2(z+2i)(z-2i)(z+1)(z-3)$

5. $|z+2i| \leq 2|z+1| \iff$ //båda led positiva// $\iff |z+2i|^2 \leq 4|z+1|^2 \iff$

$\iff$ //sätt $z = x+iy$ med $x,y \in \mathbb{R}$// $\iff |x+(y+2)i|^2 \leq 4|(x+1)+iy|^2 \iff$

$\iff x^2+(y+2)^2 \leq 4((x+1)^2+y^2) \iff x^2+y^2+4y+4 \leq 4x^2+8x+4+4y^2 \iff$

$\iff 3x^2+8x+3y^2-4y \geq 0 \iff x^2+\frac{8}{3}x+y^2-\frac{4}{3}y \geq 0 \iff$

$\iff \left(x+\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \geq 0 \iff$

$\iff \left(x+\frac{4}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{2}{3}\right)^2 \geq \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{9} = \left(\frac{\sqrt{20}}{3}\right)^2$,

dvs. olikheten beskriver alla tal i det komplexa talplanet som ligger utanför eller på cirkeln i det komplexa talplanet med radie $\frac{\sqrt{20}}{3}$ och medelpunkt i $z = -\frac{4}{3}+\frac{2}{3}i$