Lösningsförslag

Dugga 1 på Grunk 91MA13/92MA13 den 2023-09-28 kl 08.00-11.00

---

1. (a) För $x \neq -2$ har vi $\frac{3x+3}{x+\frac{1}{2+x}} = \frac{3(x+1)}{\frac{x(x+2)+1}{2+x}} = \frac{3(x+1)(x+2)}{(x+1)^2} = \frac{3(x+2)}{x+1}$. Uttrycket alltså definierat för alla x utom -2 och -1.

   (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{9} \frac{2^{k+3}}{4^k} = \sum_{k=2}^{9} 2^3 \frac{2^k}{4^k} = \sum_{k=2}^{9} 8(\frac{1}{2})^k = 2\frac{(\frac{1}{2})^8 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -4(\frac{1}{2^8} - 1) = 4 - \frac{1}{2^6} = \frac{256-1}{64} = \frac{255}{64}$, där vi i tredje likheten noterade att summan är geometrisk med kvot $\frac{1}{2}$, och använde formeln för geometrisk summa.

   (c) $(2x-1)^7 = \displaystyle\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (2x)^{7-k}(-1)^k$. x^3-koefficienten motsvarar $k = 4$ och blir alltså $\binom{7}{4}(2)^3(-1)^4 = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} \cdot 8 = 7 \cdot 8 \cdot 5 = 280$.

   Svar: (a) $\frac{3(x+2)}{x+1}$ för $x \notin \{-1, -2\}$ (b) $\frac{255}{64}$ (c) 280

2. $3 + \sqrt{19-3x} = x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{19-3x} = x - 3$. Om $x < 3$ saknas då lösningar, så vi antar från och med nu att $x \geq 3$. Under antagandet är föregående likhet ekvivalent med $19 - 3x = (x-3)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 9 = 19 - 3x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 10 = 0$. Kvadratkomplettering ger att ekvationen kan skrivas $(x-5)(x+2) = 0$, vilket ger $x = 5$ eller $x = -2$. Men vårt villkor var $x \geq 3$, så
   Svar: Endast $x = 5$ löser ekvationen.

3. Vi flyttar allt till vänsterledet och skriver på gemensam nämnare:
   $\frac{2x^2+8}{x+1} \geq 5 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x^2+8-5(x+1)}{x+1} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x^2-5x+3}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2})}{x+1} \geq 0$
   Vi kvadratkompletterar polynomet i täljaren:
   $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = (x-\frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16} + \frac{3}{2} = (x-\frac{5}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2 = (x-\frac{3}{2})(x-1)$ där vi i sista steget använde konjugatregeln. Vår olikhet kan alltså skrivas $\frac{2(x-\frac{3}{2})(x-1)}{x+1} \geq 0$. Vi kallar vänsterledet $f(x)$ och vi gör en teckentabell och tar med täljarens och nämnarens nollställen $-1, 1, \frac{3}{2}$ som kolonner:

		-1		1		$\frac{3}{2}$	
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-\frac{3}{2}$	-	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	$\wr$	+	0	-	0	+

   Med $\wr$ menar vi att uttrycket är odefinierat. Vi ser nu när $f(x) \geq 0$:
   Svar: Olikheten gäller när $-1 < x \leq 1$ och när $x \geq \frac{3}{2}$.

4. $z^2 + 2i = z + 3iz + 2 \;\Leftrightarrow\; z^2 - (1+3i)z + 2i - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (z - \frac{(1+3i)}{2})^2 - \frac{(1+3i)^2}{4} + 2i - 2 = 0$
   $\Leftrightarrow\; (z - \frac{(1+3i)}{2})^2 - \frac{-8+6i}{4} + 2i - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (z - \frac{(1+3i)}{2})^2 = -\frac{i}{2}$
   Låt $z - \frac{(1+3i)}{2} = a + bi$ så att ekvationen blir $(a+bi)^2 = -\frac{i}{2} \;\Leftrightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = -\frac{i}{2}$.
   Vi jämför nu sidornas realdel, imaginärdel, och absolutbelopp:
   $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -\frac{1}{2} \\ a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = \frac{1}{2} \\ ab = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2} \\ \text{eller} \\ a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + i \\ \text{eller} \\ z = 2i \end{cases}$ där vi i sista steget utnyttjade att $z = \frac{(1+3i)}{2} + a + bi$.
   Svar: Ekvationens håller för $z = 1 + i$ och för $z = 2i$.

5. Med $z = a + bi$ får vi

$$\begin{cases} (2+i)z + \overline{(2+i)z} = 2 \\ |z-1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2+i)(a+bi) + (2-i)(a-bi) = 2 \\ \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 2 \\ (a-1)^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

Den övre ekvationen beskriver linjen $\{a + bi \in \mathbb{C} \mid b = 2a - 1\}$ i talplanet, alltså linjen genom $-i$ och $1 + i$. Den andra ekvationen beskriver en cirkel centrerad i punken 1 i talplanet och med radie 1 (vilket kan ses direkt från $|z - 1| = 1$). Bägge ekvationerna håller alltså på skärningspunkterna mellan linjen och cirkeln. Vi substituerar $b = 2a - 1$ i cirkelns ekvation och får
$(a-1)^2+(2a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2-2a+1+4a^2-4a+1 = 1 \Leftrightarrow 5a^2-6a+1 = 0 \Leftrightarrow a^2-\frac{6}{5}a+\frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow (a-\frac{3}{5})^2-(\frac{9}{25})+\frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow (a-\frac{3}{5})^2-(\frac{2}{5})^2 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-\frac{1}{5}) = 0$, så vi har två möjligheter för a. Med relationen $b = 2a - 1$ får vi att $a = 1 \Rightarrow b = 1$, och $a = \frac{1}{5} \Rightarrow b = -\frac{3}{5}$. Vi går slutligen tillbaka till variabeln $z = a + bi$:
Svar: Ekvationssystemet har två lösningar: $z = 1 + i$ och $z = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$. Vi illustrerar lösningarna till var och en av ekvationerna enligt ovanstående resonemang: