Lösningsförslag

Dugga 1 på Grunk 91MA13/92MA13 den 2023-10-13 kl 08.00-11.00

---

1. (a) $\binom{10}{7} \cdot \binom{11}{7} \cdot \frac{7!}{11!} = \frac{10!}{7!3!} \cdot \frac{11!}{7!4!} \cdot \frac{7!}{11!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^4 \cdot 3^2} = 5.$

   (b) Summan är aritmetisk med skillnad 3, vi skriver om summan med sigmanotation och använder formeln för aritmetisk summa:
   $$-17 - 14 - 11 - \cdots + 22 + 25 + 28 = \sum_{k=-6}^{9} 3k + 1 = \frac{(-17 + 28)(9 - (-6) + 1)}{2} =$$
   $$\frac{11 \cdot 16}{2} = 11 \cdot 8 = 88.$$

   (c) Vi flyttar allt till vänstersidan, kvadratkompletterar, och jämför med formeln för en godtycklig cirkel:
   $x^2 + 2y + 1 = 4x - y^2 \;\Leftrightarrow\; (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + 1 = 0$
   $\Leftrightarrow\; (x-2)^2 + (y - (-1))^2 = 2^2,$
   så medelpunkten är i $(x, y) = (2, -1)$ och radien är 2.

   Svar: (a) 5 $\quad$ (b) 77 $\quad$ (c) Medelpunkt $(2, -1)$, radie 2.

2. Vi flyttar allt till vänsterledet, skriver på gemensamt bråksträck och faktoriserar med konjugatregeln:
   $\frac{x^3-2}{x-2} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^3-2-(x-2)}{x-2} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^3-x}{x-2} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x(x-1)(x+1)}{x-2} \leq 0.$ Vi kallar vänsterledet $f(x)$ och gör en teckentabell som tar med täljarens och nämnarens nollställen $-1, 0, 1, 2$ som kolonner:

		-1		0		1		2	
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
x	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-	$\wr$	+

   Med $\wr$ menar vi att uttrycket är odefinierat. Vi ser nu när $f(x) \leq 0$:
   Svar: Olikheten gäller när $-1 \leq x \leq 0$ och när $1 \leq x < 2$.

3. Vi har $|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{när } x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x & \text{när } x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ och $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{när } x \geq 3 \\ 3-x & \text{när } x \leq 3 \end{cases}$,
   så vi delar in i tre fall:

   - **Fall 1:** $x \leq \frac{1}{2}$: Ekvationen är då $1 - 2x + 3 - x = 2x \Leftrightarrow 5x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$, detta är dock ingen lösning eftersom det ligger utanför det aktuella invervallet.
   - **Fall 2:** $\frac{1}{2} < x \leq 3$: Ekvationen är då $2x - 1 + 3 - x = 2x \Leftrightarrow x = 2$, vilket tillhör intervallet, så detta är en lösning till ekvationen.
   - **Fall 3:** $x > 3$: Ekvationen är då $2x - 1 + x - 3 = 2x \Leftrightarrow x = 4$, vilket tillhör intervallet, så detta är en lösning till ekvationen.

   Svar: Ekvationen har två lösningar, $x = 2$ och $x = 4$.

4. Vi beräknar $p(z)$ för några låga heltal och finner att $p(2) = 0$. Enligt faktorsatsen är $p(z)$ därför delbart med $z - 2$. Vi utför divisionen och får att $p(z) = (z-2)(z^2+2z+5)$, så det återstår att faktorisera z^2+2z+5. Här kan man använda standardmetoden med ansats, men i det här fallet är det lättare att skriva $z^2 + 2z + 5 = (z+1)^2 + 4 = (z+1)^2 - (2i)^2 = (z + 1 - 2i)(z + 1 + 2i) = (z - (-1 + 2i))(z - (-1 - 2i))$.
   Svar: Polynomet har tre komplexa nollställen $z = 2$, $z = -1 + 2i$, och $z = -1 - 2i$.

5. Formeln för geometrisk summa fungerar även när kvoten är komplex (samma bevis fungerar). Vi tillämpar formeln två gånger och förenklar:

$$a_n = \big(i+\sum_{k=0}^{n}(1-i)^k\big)\cdot\big(-i+\sum_{k=0}^{n}(1+i)^k\big) = \big(i+\frac{(1-i)^{n+1}-1}{(1-i)-1}\big)\big(-i+\frac{(1+i)^{n+1}-1}{(1+i)-1}\big)$$
$$= \big(i+\tfrac{(1-i)^{n+1}-1}{-i}\big)\big(-i+\tfrac{(1+i)^{n+1}-1}{i}\big) = \big(\tfrac{1+(1-i)^{n+1}-1}{-i}\big)\big(\tfrac{1+(1+i)^{n+1}-1}{i}\big)$$
$$= \tfrac{(1-i)^{n+1}}{-i}\cdot\tfrac{(1+i)^{n+1}}{i} = (1-i)^{n+1}(1+i)^{n+1} = \big((1+i)(1-i)\big)^{n+1} = 2^{n+1}.$$

Så $a_n = 2^{n+1}$ för alla heltal $n \geq 0$ vilket visar påståendet.

Kommentar: Med $w_n = i + \sum_{k=0}^{n}(1-i)^k$ så har vi $a_n = w_n \cdot \overline{w}_n \in \mathbb{R}$, så även utan räkningen kan man inse att a_n är reellt.