Lösningsförslag

Dugga 1 (STN1) på Grunk 91MA13/92MA13 den 2024-09-25 kl 14.00-17.00

---

1. (a) Vi kallar summan s. I sigma-notation har vi $s = \sum_{k=0}^{19} 4k + 11$ så vi ser att antalet termer är $19 - 0 + 1 = 20$. Formeln för aritmetisk summa ger direkt

$$s = \frac{(87 + 11) \cdot 20}{2} = 98 \cdot 10 = 980.$$

(b) $|\frac{3+i}{1-i} - 4| = |\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - 4| = |\frac{2+4i}{2} - 4| = | - 3 + 2i| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$

(c) $\binom{22}{19} - \binom{21}{18} = \frac{22!}{19! \cdot 3!} - \frac{21!}{18! \cdot 3!} = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{6} - \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{6} = 21 \cdot 20 \cdot \frac{22-19}{6} = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210.$

Svar: (a) 980 (b) $\sqrt{13}$ (c) 210

2. Vi har $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{när } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{när } x \leq -1 \end{cases}$ och $|2x - 5| = \begin{cases} 2x - 5 & \text{när } x \geq \frac{5}{2} \\ -2x + 5 & \text{när } x \leq \frac{5}{2}, \end{cases}$

så vi får tre fall:
Fall 1: Antag att $x \leq -1$. Ekvationen blir $-x - 1 - 2x + 5 = x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$, men detta motsäger vårt antagande $x \leq -1$, så $x = 0$ är inte en lösning.
Fall 2: Antag att $-1 < x \leq \frac{5}{2}$. Ekvationen blir $x + 1 - 2x + 5 = x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$, detta värde tillhör intervallet vi undersöker, så $x = 1$ löser ekvationen.
Fall 3: Antag att $x > \frac{5}{2}$. Ekvationen blir $x + 1 + 2x - 5 = x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$, detta värde tillhör intervallet vi undersöker, så $x = 4$ löser ekvationen.

Svar: Ekvationen har två lösningar, $x = 1$ och $x = 4$.

3. Vi faktoriserar vänsterledets nämnare med kvadratkomplettering:
$x^2+x-6 = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{24}{4} = (x+\frac{1}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 = (x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2})(x+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}) = (x+3)(x-2).$
Vi flyttar nu alla termer till samma sida i olikheten och skriver på gemensam nämnare:

$$\frac{x^2 + 5}{x^2 + x - 6} \geq \frac{x}{x - 2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + 5}{(x + 3)(x - 2)} - \frac{x}{x - 2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + 5}{(x + 3)(x - 2)} - \frac{x(x + 3)}{(x + 3)(x - 2)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + 5 - x^2 - 3x}{(x + 3)(x - 2)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5 - 3x}{(x + 3)(x - 2)} \geq 0.$$

Vi gör en teckentabell, vi skriver $f(x)$ för vänsterledet ovan:

		-3		$\frac{5}{3}$		2	
$x + 3$	-	0	+	+	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	-	0	+
$5 - 3x$	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	+	$\wr$	-	0	+	$\wr$	-

Så vår olikhet gäller när $f(x) \geq 0$:
Svar: Olikheten gäller då $x < -3$ eller $\frac{5}{3} \leq x < 2$.

4. Vi kvadratkompletterar $p(z)$:
$p(z) = z^2 - 8iz - 19 + 4i = (z-4i)^2 - (4i)^2 - 19 + 4i = (z-4i)^2 - 3 + 4i$, så vi ska lösa ekvationen $p(z) = 0 \Leftrightarrow (z-4i)^2 = 3 - 4i$. Vi inför $z - 4i = a + bi$, så att vår ekvation blir $(a+bi)^2 = 3 - 4i$. Vi jämför nu sidornas realdel, imaginärdel, och absolutbelopp. Detta ger systemet

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 8 \\ ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = -\frac{2}{a} \end{cases},$$

där vi adderade de första ekvationerna och fick $a = \pm 2$, den nedre ekvationen ger att $a = 2 \Rightarrow b = -1$ respektive $a = -2 \Rightarrow b = 1$. Så lösningarna är att $(a,b) = (2,-1)$ eller $(a,b) = (-2,1)$. Eftersom $z = a + bi + 4i$ får vi två lösningar $z = 2 + 3i$ och $z = -2 + 5i$.

Svar: Polynomets nollställen är $z = 2 + 3i$ och $z = -2 + 5i$.

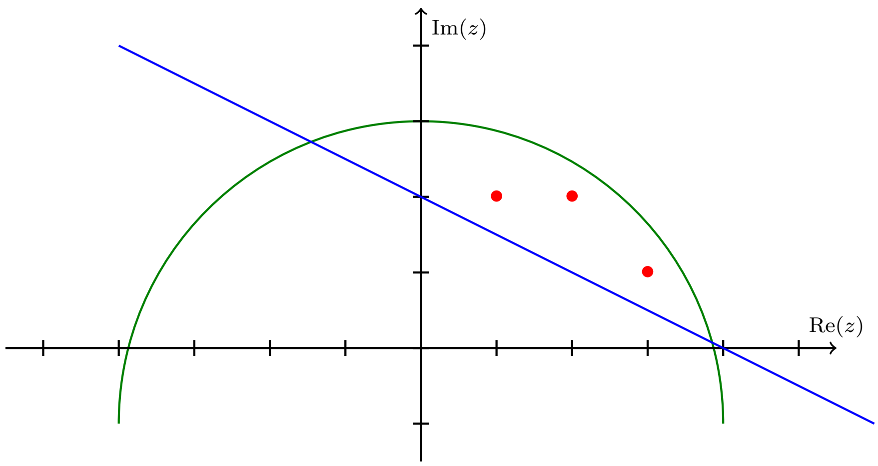
5. Den översta olikheten beskriver en cirkelskiva i komplexa talplanet med medelpunkt $-i$ och radie 4. För att ta reda på vilka z som uppfyller den nedre olikheten inför vi $z = x + iy$ och får

$$|z-1-4i| < |z+1| \Leftrightarrow |z-1-4i|^2 < |z+1|^2 \Leftrightarrow |(x-1)+(y-4)i|^2 < |(x+1)+yi|^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-4)^2 < (x+1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 < x^2 + 2x + 1 + y^2 \Leftrightarrow 16 < 4x + 8y$$

$\Leftrightarrow y > -\frac{1}{2}x + 2$. Ekvationen $y = -\frac{1}{2}x + 2$ beskriver en linje i komplexa talplanet, och olikheten säger att vi ska ligga strikt ovanför denna linje.

Vi söker alltså alla heltalskoordinater (x,y) som ligger innanför cirkeln men ovanför linjen. Vi ritar en grov skiss:



Här ligger tre gaussiska heltal strikt innanför cirkeln och ovanför linjen. Detta kan verifieras exakt, notera exempelvis att $z = 3 + i$ ligger *innanför* cirkeln eftersom vi då har $|z+i| = |3+2i| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} < 4$. På samma sätt kan man se att exempelvis $3 + 2i$ ligger utanför cirkeln eftersom $|(3+2i)+i| = \sqrt{18} \geq 4$.

Svar: $z = 1 + 2i$, $z = 2 + 2i$, och $z = 3 + i$ är de gaussiska heltal som uppfyller olikheterna.