Lösningsförslag

Dugga 1 på Grunk 91MA13/92MA13 den 2024-10-14 kl 14.00-17.00

---

1. (a) Vi kallar summan s. I sigma-notation har vi $s = \sum_{k=0}^{9}(-\sqrt{2})^k$ så vi ser att antalet termer är 10. Formeln för geometrisk summa ger direkt

$$s = \frac{(-\sqrt{2})^{10} - 1}{-\sqrt{2} - 1} = -\frac{32 - 1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{-31(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{31(1 - \sqrt{2})}{2 - 1} = 31(1 - \sqrt{2}).$$

   (b) $\overline{z} + 2i = i\overline{z} + 3 \Leftrightarrow \overline{z}(1 - i) = 3 - 2i \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{3-2i}{1-i} = \frac{(3-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{5+i}{2}$. Konjugering ger slutligen $z = \frac{5-i}{2}$

   (c) Binomialsatsen ger $(1 - x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (-x)^k \cdot 1^{12-k}$. Koefficienten för x^3 fås när $k = 3$, denna är alltså $\binom{12}{3}(-1)^3 \cdot 1^9 = -\frac{12!}{9! \cdot 3!} = -\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = -2 \cdot 11 \cdot 10 = -220$.

Svar: (a) $31(1 - \sqrt{2})$ (b) $z = \frac{5-i}{2}$ (c) -220

2. Kvadrering av bägge led ger
$\sqrt{3x + 4} = 2x + 1 \;\Rightarrow\; 3x + 4 = (2x + 1)^2$
$\Leftrightarrow\; 3x + 4 = 4x^2 + 4x + 1 \;\Leftrightarrow\; 4x^2 + x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow\; x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} = 0 \;\Leftrightarrow\; (x + \frac{1}{8})^2 - \frac{1}{64} - \frac{48}{64} = 0$
$\Leftrightarrow\; (x + \frac{1}{8})^2 = (\frac{7}{8})^2 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{8} \pm \frac{7}{8}$
$\Leftrightarrow\; x = -1$ eller $x = \frac{3}{4}$. Eftersom endast implikation gäller i första steget kontrollerar vi våra lösningskandidater via insättning i ursprungsekvationen. Vi finner då att $x = \frac{3}{4}$ är en lösning medan $x = -1$ är en falsk rot.

Svar: Ekvationens enda lösning är $x = \frac{3}{4}$.

3. Vi har

$$\frac{6 - x}{x - 1} \le \frac{x}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{6 - x}{x - 1} - \frac{x}{2} \le 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{12 - 2x}{x - 1} - x \le 0$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{12 - 2x}{x - 1} - \frac{x(x - 1)}{x - 1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{12 - x - x^2}{x - 1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 12}{x - 1} \ge 0,$$

där vi multiplicerade med -1 i sista steget och vände på olikhetstecknet. Vi kvadratkompletterar täljaren:
$x^2 + x - 12 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{48}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - (\frac{7}{2})^2$
$= ((x + \frac{1}{2}) + \frac{7}{2})((x + \frac{1}{2}) - \frac{7}{2}) = (x + 4)(x - 3)$.
Så olikheten vi ska lösa är ekvivalent med $\frac{(x+4)(x-3)}{x-1} \ge 0$.

Vi gör en teckentabell, vi skriver $f(x)$ för vänsterledet ovan:

		-4		1		3	
$x + 4$	-	0	+	+	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	-	0	+
$x - 1$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	-	0	+	∤	-	0	+

Så vår olikhet gäller när $f(x) \ge 0$:
Svar: Olikheten gäller då $-4 \le x < 1$ eller $x \ge 3$.

4. Låt $p(z) = z^3 - 5z^2 + 7z + 13$. Vi beräknar $p(z)$ för ett par låga heltal z och finner att $p(-1) = 0$. Enligt faktorsatsen har vi därför $p(z) = (z+1)q(z)$ för något polynom $q(z)$. Polynomdivision (ej utskriven i detta lösningsförslag) ger att $q(z) = \frac{z^3-5z^2+7z+13}{z+1} = z^2 - 6z + 13$. Vi kvadratkompletterar kvoten:
$q(z) = z^2 - 6z + 13 = (z-3)^2 - 9 + 13 = (z-3)^2 + 4 = (z-3)^2 - (2i)^2 = (z-3+2i)(z-3-2i)$. Detta ger att

$$p(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; (z+1)(z-(3-2i))(z-(3+2i)) = 0$$

så vi drar följande slutsats:
Svar: Ekvationen har tre lösningar, $z = -1$, $z = 3 + 2i$, och $z = 3 - 2i$.

5. Summan i tipset är en teleskopsumma, vi har

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3 = (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + \cdots + ((n+1)^3 - n^3) = (n+1)^3 - 1$$

eftersom alla andra termer parvis stryks.
Men eftersom $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ så kan vi nu beräkna

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3 - 3k - 1 = \frac{1}{3}\big(\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3\big) - \frac{1}{3}\big(\sum_{k=1}^{n} 3k + 1\big).$$

Den vänstra summan har vi beräknat ovan, och den högra är aritmetisk med n termer där första är 4 och sista är $3n+1$, så formeln för aritmetisk summa ger

$$\sum_{k=1}^{n} 3k + 1 = \frac{n(4 + 3n + 1)}{2} = \frac{n(3n+5)}{2}.$$

Sammantaget har vi alltså

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}((n+1)^3 - 1) - \frac{1}{3}\cdot\frac{n(3n+5)}{2} = \frac{2(n^3 + 3n^2 + 3n) - (3n^2 + 5n)}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Svar: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.