Lösningsförslag

Dugga 1 (STN1) på Grunk 91MA13/92MA13 den 2025-09-25 kl 8.00-11.00

---

1. (a) Formeln för aritmetisk summa ger $\frac{(123+28)\cdot 20}{2} = 151 \cdot 10 = 1510$.

   (b) Binomialsatsen ger $(2x+1)^7 = \displaystyle\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (2x)^k (1)^{7-k}$, så x^4 termen motsvarar $k = 4$, vilket ger koefficienten $\binom{7}{4} \cdot 2^4 \cdot 1^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} \cdot 16 = 35 \cdot 16 = 560$.

   Svar: a) 1510 b) 560

2. (a) **Fall 1**: När $x \geq \frac{5}{2}$ blir ekvationen $2x - 5 = 3x + 1 \Leftrightarrow x = -6$, men denna lösning förkastas eftersom den inte tillhör det undersökta intervallet.
   Fall 2: När $x < \frac{5}{2}$ blir ekvationen $-2x + 5 = 3x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$ vilket verkligen är en lösning.

   (b) Vi har $\sqrt{5x+11} = x + 1 \Rightarrow 5x + 11 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{49}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3\pm 7}{2} \Leftrightarrow x = 5$ eller $x = -2$. Men eftersom implikation användes i första steget behöver lösningarna kontrolleras, och vi ser då att endast $x = 5$ löser ursprungsekvationen.

   Svar: a) $x = \frac{4}{5}$ b) $x = 5$.

3. Kalla polynomet i vänsterledet $p(z)$. Vi kvadratkompletterar:
   $p(z) = z^2 - (6+2i)z + 11 + 10i = (z-(3+i))^2 - (3+i)^2 + 11 + 10i = (z-(3+i))^2 + 3 + 4i$, så vi ska lösa ekvationen $p(z) = 0 \Leftrightarrow (z - (3+i))^2 = -3 - 4i$. Vi inför $z - (3+i) = a + bi$, så att vår ekvation blir $(a+bi)^2 = -3 - 4i$. Vi jämför nu sidornas realdel, imaginärdel, och absolutbelopp. Detta ger systemet

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 2 \\ 2b^2 = 8 \\ ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 2 \\ ab = -2 \end{cases},$$

   där vi i första steget adderade respektere subtraherade ekvation (1) och (3). Sambandet mellan a och b ger att $a = 1 \Rightarrow b = -2$ respektive $a = -1 \Rightarrow b = 2$. Så lösningarna är att $(a,b) = (1,-2)$ eller $(a,b) = (-1,2)$. Eftersom $z = a + bi + 3 + i$ får vi två lösningar $z = 4 - i$ och $z = 2 + 3i$.

   Svar: Ekvationens lösningar är $z = 4 - i$ och $z = 2 + 3i$.

4. Olikheten i uppgiften är ekvivalent med

$$2x + 3 - \frac{12x}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+3)(x+1) - 12x}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 7x + 3}{x+1} \geq 0.$$

   Vi behöver faktorisera täljaren, efter att vi brytit ut en faktor 2 kan vi kvadratkomplettera:
   $x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = (x - \frac{7}{4})^2 - (\frac{7}{4})^2 + \frac{3}{2} = (x - \frac{7}{4})^2 - \frac{49}{16} + \frac{24}{16} = (x - \frac{7}{4})^2 - (\frac{5}{4})^2 = (x - \frac{7}{4} - \frac{5}{4})(x - \frac{7}{4} + \frac{5}{4}) = (x-3)(x - \frac{1}{2})$. Olikheten vi ska lösa är således ekvivalent med

$$\frac{2(x-3)(x-\frac{1}{2})}{x+1} \geq 0.$$

Vi gör en teckentabell, faktorn 2 är alltid positiv och tas ej med. Vi skriver $f(x)$ för vänsterledet ovan:

		-1		$\frac{1}{2}$		3	
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
$x-\frac{1}{2}$	-	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	$\wr$	+	0	-	0	+

Så vår olikhet gäller när $f(x) \geq 0$:
Svar: Olikheten gäller då $-1 < x \leq \frac{1}{2}$ eller $x \geq 3$.

5. Vi följer tipset. När z är ett nollställe kan vi lösa ut z^5 ur ekvationen $p(z) = 0$, ta absolutbeloppet av bägge sidor, använda triangelolikheten och att alla koefficienterna har absolutbelopp ≤ 3, och slutligen använda formeln för geometrisk summa. Vi får

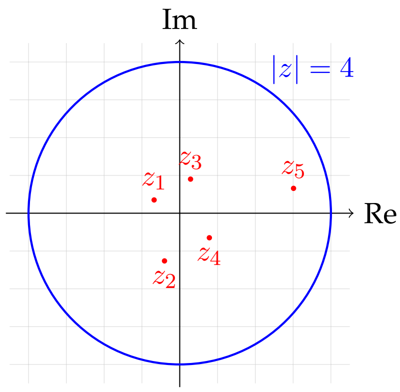
$$\begin{aligned}
|z|^5 &= |3z^4 + (-1+2i)z^3 + 2z^2 - z + 3i| \\
&\leq |3| \cdot |z|^4 + |(-1+2i)| \cdot |z|^3 + |2| \cdot |z|^2 + |-1| \cdot |z| + |3i| \\
&= 3|z|^4 + \sqrt{5}|z|^3 + 2|z|^2 + |z| + 3 \\
&< 3(|z|^4 + |z|^3 + |z|^2 + |z| + 1) = 3\frac{|z|^5 - 1}{|z| - 1}.
\end{aligned}$$

Antag nu att $|z| \geq 4$, olikheten ovan kan då skrivas om som $|z|^5(|z|-1) < 3|z|^5 - 3$, vi samlar $|z|^5$ termer och får

$$|z|^5(|z| - 4) < -3.$$

Men enligt antagandet $|z| \geq 4$ kan vänsterledet inte bli negativt, så detta är en motsägelse. Vi kan därför dra slutsatsen att alla fem nollställen uppfyller $|z| < 4$.

Kommentar I: Det finns ingen allmän formel för att lösa femtegradsekvationer exakt, så det är hopplöst att försöka räkna ut de exakta nollställena för hand. Men för att illustrera var nollställena faktiskt ligger har vi approximerat dem numeriskt:



Kommentar II: Uppgiften är ett exempel på *Cauchys sats* som säger att alla nollställen till ett polynom

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

uppfyller $|z| \leq 1 + M$ där $M = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|)$ är största absolutbeloppet bland koefficienterna. Cauchys sats kan bevisas med precis samma argument som i denna uppgift.