Matematiska institutionen vid Linköpings Universitet
Kursnamn: Matematisk grundkurs   Utbildningskoder: 91MA13 och 92MA13
Modul: STN2 (dugga 2)   Den 2024-11-18 kl 08.00-12.00
Examinator: Jonathan Nilsson

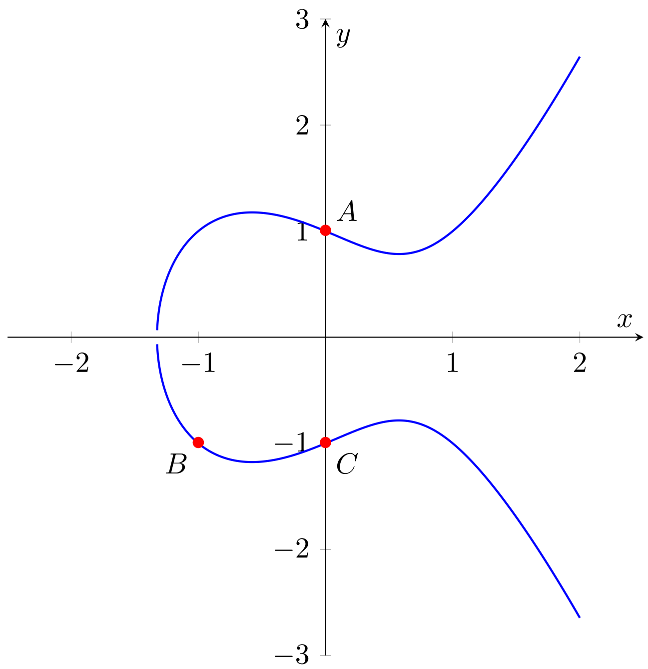
Endast skrivverktyg är tillåtna. Duggan har sju uppgifter där var och en är värd 3p. Maxpoäng är 21p. Gränsen för godkänt är 9p. Om inget annat anges krävs en fullständig och välmotiverad lösning som går att följa. Skriv tydligt vad ditt svar är på varje uppgift, och svara på enklast möjliga form. Lösningar som är oläsliga eller inte går att följa eller som innehåller endast svar bedöms som noll poäng. Börja varje uppgift på en ny sida och lämna in uppgifterna i nummerordning. Skriv inte med rödpenna. Ett lösningsförslag publiceras på kurshemsidan efter skrivtidens slut.

---

1. (a) Beräkna $\frac{1}{13}\binom{14}{5}$.
   (b) Ange ett argument för talet $z = \frac{(1+i)^9(\sqrt{3}+i)}{5i}$.
   (c) Lös ekvationen $2^{x+3} = e^x$.
2. (a) Förenkla $\arcsin(\cos(\frac{6\pi}{5}))$.
   (b) Förenkla $\alpha = \arctan(\sqrt{2}-1)$ genom att först beräkna $\tan(2\alpha)$.
3. (a) Lös ekvationen $\ln(x) + \ln(x-3) = 2\ln(2) + \ln(7)$.
   (b) Använd Eulers formler för att bevisa att $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
4. Låt $f(x) = \arccos\big(2x+3\big) - 5$. Ange den naturliga definitionsmängden till f, värdemängden för f, och ett uttryck för inversen f^{-1}.
5. Ange alla lösningar till ekvationen $2\sin(x) - \sqrt{12}\cos(x) = 4\sin(3x)$ genom att först skriva om vänsterledet med hjälpvinkelmetoden.
6. Lös den binomiska ekvationen $4(\frac{z}{2}-5)^4 = -81$.
7. Ekvationen $y^2 = x^3 - x + 1$ beskriver en *elliptisk kurva* i planet, se bilden på baksidan av detta papper. Om A och B är punkter på kurvan kan vi dra en linje genom dem, den linjen skär (vanligen) kurvan i en tredje punkt $P = (x, y)$. Låt $P' = (x, -y)$ vara spegelbilden av P i x-axeln. Vi definierar på detta vis
$$A \oplus B = P'.$$
   Denna sorts "addition" av punkter på en elliptisk kurva har tillämpningar inom bland annat kryptografi och primtalsfaktorisering.

   Låt nu $A = (0, 1)$, $B = (-1, -1)$, och $C = (0, -1)$.
   (a) Beräkna $A \oplus B$.
   (b) Gäller det att $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$?

Lycka till!



Kurvan $y^2 = x^3 - x + 1$ från uppgift 7.
Kurvan fortsätter egentligen till höger men är avklippt vid $x = 2$ i bilden.