KORTFATTAT LÖSNINGSFÖRSLAG, DUGGA 2, 20211029

91/92MA13
TATB03

1. a) $\binom{51}{47} = \frac{51!}{47!(51-47)!} = \frac{51!}{47!\cdot 4!} = \frac{51\cdot 50\cdot 49\cdot \cancel{48}^{\,2}}{\cancel{24}_{\,1}} = 51\cdot 49\cdot 100 = (50+1)(50-1)\cdot 100 =$

$= (2500-1)\cdot 100 = 249900$ ← SVAR

b) $\sum_{k=-3}^{21}(6k-55) = \Big/\!\!\Big/$ aritmetisk summa med första term -73, sista term 71, och 25 st termer $\Big/\!\!\Big/ = \frac{(-73+71)}{2}\cdot 25 = -25$ ← SVAR

c) En cirkel med medelpunkt i (x_0, y_0) och radie r ges av $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, vilket med $x_0=3$, $y_0=-2$ och $r=\sqrt{5}$ ger $(x-3)^2+(y+2)^2=5$ $(\Leftrightarrow x^2-6x+y^2+4y+8=0)$ ← SVAR

2. a) $z = e^{i\frac{\pi}{6}} + \frac{i}{3-i} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} + \frac{i(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3i-1}{10} = \frac{5\sqrt{3}-1}{10} + \frac{4}{5}i$

$\Leftrightarrow \bar{z} = \frac{5\sqrt{3}-1}{10} - \frac{4i}{5}$ ← SVAR

b) $(2-y)^{-1} = 2^{-1} + y^{-1} \overset{(y\neq 0,\, y\neq 2)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2-y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{y} = \frac{2+y}{2y} \Leftrightarrow 2y = (2-y)(2+y) = 4-y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = y^2+2y-4 = (y+1)^2-1-4 = (y+1)^2-5 = (y+1)^2-(\sqrt{5})^2 =$

$= (y+1-\sqrt{5})(y+1+\sqrt{5}) \Leftrightarrow y = -1+\sqrt{5}$ eller $y = -1-\sqrt{5}$

SVAR: $y=-1+\sqrt{5}$ och $y=-1-\sqrt{5}$ löser ekvationen $(2-y)^{-1} = 2^{-1}+y^{-1}$.

c) $\frac{e^{8x}}{e^4\cdot e^{x^2}} = e^{8x}\cdot e^{-4}\cdot e^{-x^2} = e^{-x^2+8x-4} = e^{-(x^2-8x+4)} = e^{-((x-4)^2-12)} = e^{-(x-4)^2+12}$

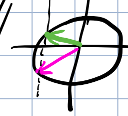
visar, då e^x är strängt växande, att $\frac{e^{8x}}{e^4 e^{x^2}}$ antar sitt största värde för $x=4$ och att detta är e^{12}.

SVAR: Det största värdet av $\frac{e^{8x}}{e^4\cdot e^{x^2}}$ är e^{12} och detta antas för $x=4$.

3. a) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3}-x+2\pi\cdot n,\ n\in\mathbb{Z} \\ \text{eller} \\ 3x-\frac{\pi}{5} = -\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+2\pi\cdot n,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$

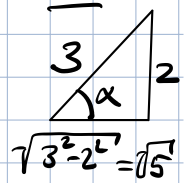
$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{8\pi}{15}+2\pi\cdot n,\ n\in\mathbb{Z} \\ \text{eller} \\ 2x = -\frac{2\pi}{15}+2\pi\cdot n,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{15}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z} \\ \text{eller} \\ x = -\frac{\pi}{15}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases}$

SVAR: $x = \frac{2\pi}{15}+\frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}$ eller $x = -\frac{\pi}{15}+\pi\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}$

3. b) $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right) = \Big/\Big/$  $;\ V_{\arccos} = [0,\pi] \Big/\Big/ = \arccos\left(\cos\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{4\pi}{5}$ SVAR

c) $\tan\left(\arcsin\frac{2}{3}\right) = ?$ $\qquad \alpha = \arcsin\frac{2}{3}$ kan,

då $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, tolkas/illustreras i den rätvinkliga triangeln



så $\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, dvs $\alpha = \arctan\frac{2}{\sqrt{5}}$ och

$\tan\left(\arcsin\frac{2}{3}\right) = \tan\left(\arctan\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ //

SVAR: $\tan\left(\arcsin\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

4. a) $\ln x - \ln 3\sqrt{2} = \ln\sqrt{2} - \ln(x-1)$

Ekvationen endast meningsfull & definierad om $x>1$!

$\iff \ln x + \ln(x-1) = \ln\sqrt{2} + \ln 3\sqrt{2}$

$\iff \ln x(x-1) = \ln(3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}),\ x>1 \iff$ //ln är injektiv// $\iff$

$\iff x(x-1) = 6,\ x>1 \iff 0 = x(x-1)-6 = (x-3)(x+2),\ x>1 \iff \underline{\underline{x=3}}$

SVAR: $x=3$ löser $\ln x - \ln 3\sqrt{2} = \ln\sqrt{2} - \ln(x-1)$

b) $25^x = \sqrt{5^{x+1}+6} \iff (5^x)^2 = \sqrt{5\cdot 5^x+6}$. Sätt $t=5^x$, $t>0$ & kvadrera:

$t^4 = 5t+6 \iff 0 = t^4-5t-6 =$ //faktorisera// $= (t+1)(t-2)(t^2+t+3)$

Eftersom $t=5^x>0$ söks endast positiva lösningar till t:

$(t+1)=0$ ger negativ lösning; $0 = t^2+t+3 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$ saknar reella lösningar;

$(t-2)=0 \iff t=2$, vilket ger $2=5^x$, dvs $\ln 2 = x\cdot\ln 5 \iff$

$\iff x = \frac{\ln 2}{\ln 5}$ $\left(=\log_5 2\right)$. SVAR: $x = \frac{\ln 2}{\ln 5}$

5. Eulers formler ger $\cos^2 2x\sin 3x = \left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right)^2\cdot\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i} = \frac{e^{i4x}+2+e^{-i4x}}{4}\cdot\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i} =$

$= \frac{e^{i7x}-e^{ix}+2(e^{i3x}-e^{-i3x})+e^{-ix}-e^{-i7x}}{8i} = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i7x}-e^{-i7x}}{2i}+2\cdot\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}-\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\sin 7x + 2\sin 3x - \sin x\right)$. Därmed har vi att

$4\cos^2 2x + \sin 7x = \sin 3x + \sin 7x \iff \sin 7x + 2\sin 3x - \sin x = \sin 3x + \sin 7x \iff \sin 3x = \sin x \iff$

$\iff \begin{cases} 3x = x + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ \text{eller} \\ 3x = \pi - x + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ \text{eller} \\ 4x = \pi + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = n\cdot\pi, n\in\mathbb{Z} \\ \text{eller} \\ x = \pi/4 + \frac{\pi}{2}n, n\in\mathbb{Z} \end{cases}$ SVAR

Forts. KORTFATTAT LÖSNINGSFÖRSLAG, Dugga 2, 20211029

91/92MA13
TATB03

6. $f(x)$ är definierad om $\ln\left(\frac{x-5}{x-3}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \Big/\!\!\Big/ \ln$ strängt växande $\Big/\!\!\Big/ \Leftrightarrow \frac{x-5}{x-3} \geq e \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x-5-e(x-3)}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(1-e)-(5-3e)}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow /\!/\ 1-e<0\ /\!/ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{x-\frac{5-3e}{1-e}}{x-3}}_{(*)} \leq 0 \Leftrightarrow /\!/ \text{teckentabell (se t.h.)} /\!/ \Leftrightarrow \frac{5-3e}{1-e} \leq x < 3.$$

x		$\frac{5-3e}{1-e}$		3	
$x-\frac{5-3e}{1-e}$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$(*)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

$\therefore$ $f(x)$ är definierad för $\frac{5-3e}{1-e} \leq x < 3$

För $x \in D_f$ gäller $y = \sqrt{\ln\frac{x-5}{x-3} - 1} \Rightarrow y^2 = \ln\left(\frac{x-5}{x-3}\right) - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-5}{x-3}\right) = y^2+1 = \ln e^{y^2+1} \Leftrightarrow /\!/ \ln \text{ str. växande} /\!/ \Leftrightarrow \frac{x-5}{x-3} = e^{y^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)e^{y^2+1} = x-5 \Leftrightarrow x(e^{y^2+1}-1) = 3e^{y^2+1}-5 \Leftrightarrow x = \frac{3e^{y^2+1}-5}{e^{y^2+1}-1}$$

$\therefore$ $f^{-1}(y) = \dfrac{3e^{y^2+1}-5}{e^{y^2+1}-1}$ eftersom x är entydigt bestämt av y.

7. $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-a| < |1-\bar{a}z| \Leftrightarrow /\!/ \text{båda led positiva} /\!/ \Leftrightarrow |z-a|^2 < |1-\bar{a}z|^2$

$$\Leftrightarrow (z-a)\overline{(z-a)} < (1-\bar{a}z)\overline{(1-\bar{a}z)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) < (1-\bar{a}z)(1-a\bar{z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} \cancel{-z\bar{a}} \cancel{-a\bar{z}} + a\bar{a} < 1 + a\bar{a}z\bar{z} \cancel{-z\bar{a}} \cancel{-a\bar{z}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 - |a|^2|z^2| < 1 - |a|^2$$

$$\Leftrightarrow |z|^2(1-|a|^2) < 1 - |a|^2$$

$$\Leftrightarrow /\!/ \text{ då } |a|<1 /\!/ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 < 1 \Leftrightarrow |z| < 1.$$

Q.E.D.