KORTFATTAT LÖSNINGSFÖRSLAG, DUGGA 2 20221029

9I/92MA13
TATB03

1 a) $4+6+8+10+\ldots+256=\sum_{k=1}^{127}(2+2k)=\Big\|$ aritmetisk summa med differens 2, 127 termer, första, sista $\Big\|=127\cdot\frac{4+256}{2}=127\cdot 130=\underline{\underline{16510}}$

b) $\frac{2}{x+2}\leq\frac{3}{x-1}\Leftrightarrow\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x-1}=\frac{-x-8}{(x+2)(x-1)}\leq 0\Leftrightarrow\frac{x+8}{(x+2)(x-1)}\geq 0.$ SVAR ↑

Teckentabell:

x		-8		-2		1	
$x+8$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+8}{(x+2)(x-1)}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

Teckentabellen visar att olikheten gäller för:

$-8\leq x<2$ eller $x>1$

SVAR ↑

c) Binomialutveckling ger att $(2-x)^7=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^k(-x)^{7-k}=$ SVAR

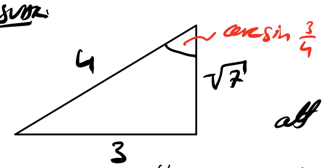
$=-x^7+2\binom{7}{1}x^6-2^2\binom{7}{2}x^5+2^3\binom{7}{3}x^4-2^4\binom{7}{4}x^3+2^5\binom{7}{5}x^2-2^6\binom{7}{6}x+2^7.$

2 a) $\sqrt{2}\cos(3x-\frac{\pi}{5})=1\Leftrightarrow\cos(3x-\frac{\pi}{5})=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 3x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi,\ n\in\mathbb{Z}$

eller $3x-\frac{\pi}{5}=-\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi,\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{20}+n\cdot\frac{2\pi}{3},\ n\in\mathbb{Z}$ eller $x=-\frac{\pi}{60}+n\frac{2\pi}{3},\ n\in\mathbb{Z}$ SVAR ↑

b) $\tan(5x+\frac{\pi}{3})=\tan 2x\Leftrightarrow 5x+\frac{\pi}{3}=2x+n\cdot\pi,\ n\in\mathbb{Z},\ 2x\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{9}+\frac{n\cdot\pi}{3},\ n\in\mathbb{Z}.$ ← SVAR



SVAR:

c) Då $0<\frac{3}{4}<1$ har vi att triangeln ... att $\tan(\arcsin\frac{3}{4})=\frac{3}{\sqrt{7}}$

3 a) $\frac{\ln(2x+1)}{\ln(x-1)}=2\overset{\text{Krav: }x>1,\ x\neq 2}{\Leftrightarrow}\ln(2x+1)=\ln(x-1)^2\Leftrightarrow\|\ln$ injektiv$\|\Leftrightarrow 2x+1=(x-1)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow x(x-4)=0\Leftrightarrow\Big\|\begin{matrix}x>1\\x\neq 2\end{matrix}\Big\|\Leftrightarrow x=4$ ← SVAR:

b) $f(x)=\ln\underbrace{(x+1)}_{>0}-\ln\underbrace{(5-2x)}_{>0}$ är definierad om $\begin{cases}x+1>0\Leftrightarrow x>-1\text{ och}\\5-2x>0\Leftrightarrow x<5/2\end{cases}$, så

SVAR → $D_f=]-1,\ 5/2[.$ För $x\in D_f$ och med $y=f(x)$ fås:

$y=\ln(x+1)-\ln(5-2x)\Leftrightarrow y=\ln\left(\frac{x+1}{5-2x}\right)\Leftrightarrow\Big\|$ · e^x injektiv · e^x och $\ln x$ varandras invers $\Big\|\Leftrightarrow e^y=\frac{x+1}{5-2x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{5e^y-1}{1+2e^y}$, vilket visar att $f^{-1}(x)=\frac{5e^x-1}{1+2e^x}.$ ← SVAR

4 a) $3\cdot 2^x=2e^x\Leftrightarrow\frac{3}{2}=\frac{e^x}{2^x}=\left(\frac{e}{2}\right)^x=e^{x\cdot\ln(e/2)}\Leftrightarrow x\cdot\ln(e/2)=\ln(3/2)\Leftrightarrow x=\frac{\ln 3-\ln 2}{1-\ln 2}$

b) $\frac{5-e^x}{e^x+4}=2e^{-2x}\Leftrightarrow 5e^{2x}-e^{3x}=2e^x+8\Leftrightarrow\|t=e^x>0\|\Leftrightarrow$ SVAR: ↗

$\Leftrightarrow 0=t^3-5t^2+2t+8=(t+1)(t^2-6t+8)=(t+1)(t-2)(t-4)\overset{t>0}{\Leftrightarrow}t=2$ eller $t=4$,

dvs $x=\ln 2$ eller $x=\ln 4$ ← SVAR

FORTS. KORTFATTAT LÖSNINGSFÖRSLAG, DUGGA 2, 20221029 91/92M1913 TATB03

5a) Se kursboken / föreläsningsanteckningarna!

b) $\sin 3x \cdot \cos 7x = // \text{Euler} // = \dfrac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i} \cdot \left(\dfrac{e^{i7x}+e^{-i7x}}{2} \right)^2 =$

$= \dfrac{e^{i17x}-e^{-i17x}-(e^{i11x}-e^{-i11x})+2(e^{i3x}-e^{-i3x})}{8i} =$

$= \dfrac{1}{4}(\sin 17x - \sin 11x + 2\sin 3x)$ ← SVAR :)

6) $(z+1)^4 = 1+i \iff //$ Sätt $z+1 = r \cdot e^{i\varphi}$, $r>0$ & $\varphi \in \mathbb{R}$; $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4} // \iff$

$\iff r^4 \cdot e^{i4\varphi} = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \iff \begin{cases} r^4 = \sqrt{2} = 2^{1/2} \\ 4\varphi = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} r = 2^{1/8} \\ \varphi = \frac{\pi}{16} + n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Vi får således lösningarna

SVAR: → $z = -1 + 2^{1/8} e^{i(\frac{\pi}{16} + n \cdot \frac{\pi}{2})}$, $n = 0, 1, 2, 3$

7) Uttrycken är definierade då $0 \le 6x - 9x^2 \le 1$ och $0 \le 2x - x^2 \le 1$, vilket ger att $0 \le x \le \frac{2}{3}$. Trigettan tillsammans med värdemängderna för arcsin respektive arccos visar att $\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2} = \sin(\arccos y)$ för $-1 \le y \le 1$.

Detta ger att $\cos(\arcsin \sqrt{6x-9x^2}) + 3\sin(\arccos \sqrt{2x-x^2}) =$

$= \sqrt{1-(6x-9x^2)} + 3\sqrt{1-(2x-x^2)} = \sqrt{(3x-1)^2} + 3\sqrt{(x-1)^2} =$

$= |3x-1| + 3|x-1| = 2$.

För $0 \le x \le 1/3$ får vi ekvationen $1 - 3x + 3 - 3x = 2 \iff x = 1/3$

För $1/3 \le x \le 2/3$ får vi $3x - 1 + 3(1-x) = 2 \iff 2 = 2$.

$\therefore$ Således löser alla x sådana att $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ekvationen. SVAR: $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$