KORTFATTAT LÖSNINGSFÖRSLAG, DUGGA 2 20221121

91/92MA13
TATB03

1 a) $23+27+\ldots+99 = \sum_{k=0}^{19}(23+k\cdot 4) = \left\| \begin{array}{l}\text{aritmetisk summa}\\ \text{med 20 termer,}\\ \text{första: 23; sista: 99}\end{array} \right\| = 20\cdot\frac{23+99}{2} = 10\cdot 122 = \underline{\underline{1220}}$

b) $\left|\frac{5+3i}{4-i}\right| = \frac{|5+3i|}{|4-i|} = \frac{\sqrt{5^2+3^2}}{\sqrt{4^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{2\cdot 17}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$ SVAR:

c) $4^x+2^{x+1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow (2^x)^2+2\cdot 2^x-\frac{5}{4}=0 \Leftrightarrow \|\text{kvad. komp}\| \Leftrightarrow (2^x+1)^2-1^2-\frac{5}{4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^x+1)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(2^x+1-\frac{3}{2}\right)\left(2^x+1+\frac{3}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left(2^x-\frac{1}{2}\right)\left(2^x+\frac{5}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \|2^x>0\| \Leftrightarrow 2^x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-1}}$ SVAR:

2 a) $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi, n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi, n\in\mathbb{Z}$ eller $2x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi, n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+n\cdot\pi, n\in\mathbb{Z}$ eller $x=-\frac{5\pi}{12}+n\cdot\pi, n\in\mathbb{Z}$ SVAR:

b) $\sin\left(\frac{\pi}{5}-2x\right)=\sin 3x \Leftrightarrow \frac{\pi}{5}-2x=3x+n\cdot 2\pi, n\in\mathbb{Z}$ eller $\frac{\pi}{5}-2x=\pi-3x+n\cdot 2\pi, n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{25}+n\cdot\frac{2\pi}{5}, n\in\mathbb{Z}$ eller $x=\frac{4\pi}{5}+n\cdot 2\pi, n\in\mathbb{Z}$ SVAR:

c) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{23\pi}{7}\right)\right)=\arccos\left(\cos\left(\frac{28\pi}{7}-\frac{23\pi}{7}\right)\right)=\arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)\right)=\frac{5\pi}{7}$ SVAR:

3 a) Från regeln, då $x,y>0$, att $\ln(x\cdot y)=\ln x+\ln y$ följer med $x=y=1$ att

$\ln 1=\ln(1\cdot 1)=\ln 1+\ln 1 \Leftrightarrow \ln 1=0.$ V.S.V.

b) $\ln(\underbrace{3-x}_{>0})-\ln(\underbrace{x+3}_{>0})=\ln(\underbrace{x+1}_{>0})$ (*) $\because$ Uttrycket definierat för $-1<x<3$

För $-1<x<3$ fås (*) $\Leftrightarrow \ln(3-x)=\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln((x+1)(x+3))$

$\Leftrightarrow \|\ln \text{ är injektiv}\| \Leftrightarrow 3-x=x^2+4x+3 \Leftrightarrow x^2+5x=0 \Leftrightarrow x(x+5)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \|-1<x<3\| \Leftrightarrow x=0.$ SVAR:

4) $f(x)$ är definierad då $\frac{x+1}{x+2}\geq 0 \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{l}\text{tecken-}\\ \text{tabell}\end{array}\right\| \Leftrightarrow x<-2$ eller $x\geq -1,$

så $D_f=]-\infty,-2[\,\cup\,[-1,\infty[$. För $x\in D_f$ har vi att $y=\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2=\frac{x+1}{x+2}, y\geq 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=\frac{1-2y^2}{y^2-1}, y\geq 0$, från vilket vi ser

dels att $f^{-1}(x)=\frac{1-2x^2}{x^2-1}$ samt dels att $V_f=D_{f^{-1}}=[0,1[\,\cup\,]1,\infty[$

SVAR: $f^{-1}(x)=\frac{1-2x^2}{x^2-1}$, $D_f=V_{f^{-1}}=]-\infty,-2[\,\cup\,[1,\infty[$, $V_f=D_{f^{-1}}=[0,1[\,\cup\,]1,\infty[$

Forts. KORTFATTAT LÖSNINGSFÖRSLAG, DUGGA 2, 20221121 — 91/92MA13 TATB03

5 a) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) =$

$= \sqrt{12}\left(\sin x \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos x \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{12}\cdot\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ Svar:

b) $3\sin 5x - \sqrt{3}\cos 5x = 3 \iff$ // enligt 5a // $\iff \sqrt{12}\sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = 3 \iff$

$\iff \sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff 5x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ eller

$5x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{\pi}{10} + n\cdot\frac{2\pi}{5},\ n\in\mathbb{Z}$ eller $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}\cdot n,\ n \in \mathbb{Z}$

Svar:

6) Notera först att $x > 0 \iff \frac{\pi}{4} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$, så

om $v = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$ har vi att $\frac{3\pi}{4} < v < \frac{3\pi}{2}$.

Av $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ får vi $\tan(\arctan 2 + \arctan 5) = \frac{2+5}{1-10} = -7/9$,

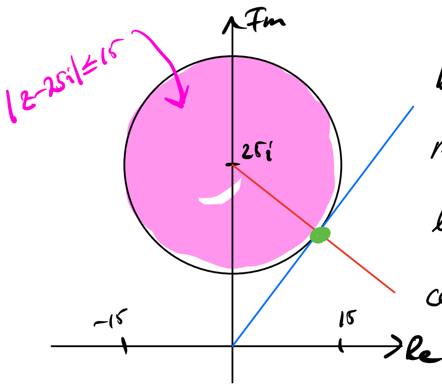
och dessutom att $\tan\left((\arctan 2 + \arctan 5) + \arctan 8\right) = \dfrac{-7/9 + 8}{1 - \left(-\frac{7}{9}\right)\cdot 8} = 1$.

Sammantaget har vi alltså att

$v = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 = \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi,\ n\in\mathbb{Z}$, $\frac{3\pi}{4} < v < \frac{3\pi}{2}\ \left(= \frac{6\pi}{4}\right)$,

dvs $v = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 = \frac{5\pi}{4}$ ← SVAR:

7) $|z - 25i| = 15$ är ekvationen för en cirkel i det komplexa talplanet:
(radie 15 och medelpunkt i $(0,25)$)



Det komplexa tal $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ som har minst argument samt uppfyller $|z - 25i| \le 15$ måste ligga på linjen genom origo som är en tangent till cirkeln $|z - 25i| = 15$ i första kvadranten.

Detta innebär att $x^2 + (y-25)^2$ och att

$\frac{y-25}{x}\cdot\frac{y}{x} = -1$ ty tangenten till en cirkel är vinkelrät mot radien i tangeringspunkten.

Detta ger ekvationerna $x^2 + y^2 - 50y = 15^2 - 25^2$ och $x^2 + y^2 - 25y = 0 \iff$

$\iff y = 16$ och $x = \pm 12$. Då $x > 0$ får att $z = 12 + 16i$ Svar: