Lösningsförslag

Dugga 2 på Grunk 91MA13/92MA13 den 2023-10-28 kl 14.00-18.00

---

1. (a) $|\frac{2+4i}{1-i} - 2 + i| = |\frac{(2+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - 2 + i| = |\frac{-2+6i}{2} - 2 + i| = | - 1 + 3i - 2 + i| = | - 3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
   Svar: $|\frac{2+4i}{1-i} - 2 + i| = 5$

   (b) Summan är geometrisk med kvot $\sqrt{2}$, den har 10 termer, och första term är 2. Enligt formeln för geometrisk summa får vi:
   $\sum_{k=2}^{11}(\sqrt{2})^k = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}^{10}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{2^6-2}{\sqrt{2}-1} = \frac{62}{\sqrt{2}-1} = \frac{62(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}^2-1^2} = 62(\sqrt{2}+1)$
   Svar: Summan blir $62(\sqrt{2}+1)$

   (c) $\ln(8e^3) - 6\ln(\sqrt{2}) = \ln(8) + \ln(e^3) - 6 \cdot \frac{1}{2}\ln(2) = 3\ln(2) + 3\ln(e) - 3\ln(2) = 3\ln(e) = 3$
   Svar: 3

2. (a) Vi ser att för $x \leq 2$ saknas lösningar, så antag att $x > 2$ och exponentiera bägge sidor. Då fås $(x+4)(x-2) = 4x+7 \;\Leftrightarrow\; x^2+2x-8 = 4x+7 \;\Leftrightarrow\; x^2-2x-15 = 0 \;\Leftrightarrow (x-5)(x+3) = 0$ och eftersom $x > 2$ så drar vi slutsatsen att
   Svar: $x = 5$ ekvationens enda lösning.

   (b) Med $t = e^x$ blir ekvationen $t^3 - 7t + 6 = 0$. Vi ser att $t = 1$ är en rot och polynomdividerar med $t-1$, och får ekvationen $(t-1)(t^2+t-6) = 0 \;\Leftrightarrow\; (t-1)(t+3)(t-2) = 0$ så $t \in \{-3, 1, 2\}$. Vi går tillbaka till variabeln x; Ekvationen $e^x = -3$ saknar reella lösningar, $e^x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ och $e^x = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \ln(2)$.
   Svar: Ekvationens lösningar är $x = 0$ och $x = \ln(2)$.

3. (a) $\sin(2x - \frac{3\pi}{5}) = \cos(x) \;\Leftrightarrow\; \cos(\frac{\pi}{2} - (2x - \frac{3\pi}{5})) = \cos(x) \;\Leftrightarrow\; \cos(\frac{11\pi}{10} - 2x) = \cos(x) \;\Leftrightarrow\; \cos(2x - \frac{11\pi}{10}) = \cos(x)$ så antingen är $2x - \frac{11\pi}{10} = x + 2n\pi$ eller $2x - \frac{11\pi}{10} = -x + 2n\pi$, eller förenklat:
   Svar: $x = \frac{11\pi}{10} + 2n\pi$ eller $x = \frac{11\pi}{30} + \frac{2n\pi}{3}$ där $n \in \mathbb{Z}$.

   (b) Vi delar upp uttrycket i två delar: $\alpha = \arcsin(\cos(\frac{7\pi}{8}))$ och $\beta = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(-3)$. Vi har $\alpha = \arcsin(\cos(\frac{7\pi}{8})) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{8})) = \arcsin(\sin(-\frac{3\pi}{8})) = -\frac{3\pi}{8}$ eftersom $-\frac{3\pi}{8} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
   Vi beräknar nu $\tan(\beta) = \frac{\tan(\arctan(\frac{1}{2}))+\tan(\arctan(-3))}{1-\tan(\arctan(\frac{1}{2}))\tan(\arctan(-3))} = \frac{\frac{1}{2}-3}{1-\frac{1}{2}(-3)} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = -1$,
   så $\beta = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, och eftersom $0 < \arctan(\frac{1}{2}) < \frac{\pi}{4}$ och $-\frac{\pi}{2} < \arctan(-3) < -\frac{\pi}{4}$ så har vi $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, vilket ger $n = 0$ och $\beta = -\frac{\pi}{4}$. Så $\alpha + \beta = -\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{8}$
   Svar: Uttrycket kan förenklas till $-\frac{5\pi}{8}$.

4. $2\sqrt{3}\cos(x) - 2\sin(x) = C\sin(x + v) = C\sin(v)\cos(x) + C\cos(v)\sin(x)$ ger att $C\sin(v) = 2\sqrt{3}$ och $C\cos(v) = -2$, vi kvadrerar och adderar ekvationerna och får $C^2(\sin^2(v) + \cos^2(v)) = 12 + 4 = 16$, så $C^2 = 16$ och vi väljer $C = 4$, vinkeln v ska då uppfylla $\sin(v) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ och $\cos(v) = -\frac{1}{2}$, så vi kan ta $v = \frac{2\pi}{3}$. Ekvationen vi ska lösa kan alltså skrivas

$$4\sin(x + \tfrac{2\pi}{3}) = -\sqrt{8} \;\Leftrightarrow\; \sin(x + \tfrac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

   Detta ger två möjligheter: $x + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$ eller $x + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$, vi löser ut x, gör liknämnigt, och får
   Svar: Ekvationens lösningar är $x = \frac{7\pi}{12} + 2n\pi$ eller $x = \frac{13\pi}{12} + 2n\pi$ där n är ett godtyckligt heltal.

5. Vi har $f(x) = \sqrt{4+\ln(x^2-2x+2)} = \sqrt{4+\ln((x-1)^2+1)}$, så för $x \geq 1$ är uttrycket en sammansättning av strängt växande funktioner, och f är därför injektiv och har en invers. Eftersom $f(x)$ växer obegränsat när x växer, och $f(1) = 2$, så får vi $V_f = [2, \infty[$. För att ta fram ett uttryck för inversen sätter vi $y = f(x)$ och har då $f^{-1}(y) = x$, så vi löser ut x som funktion av y: För $x \geq 1$ har vi $y \geq 2$ och då gäller: $y = \sqrt{4+\ln((x-1)^2+1)} \Leftrightarrow y^2 = 4+\ln((x-1)^2+1) \Leftrightarrow y^2-4 = \ln((x-1)^2+1) \Leftrightarrow e^{y^2-4} = (x-1)^2+1 \Leftrightarrow e^{y^2-4}-1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{e^{y^2-4}-1} = x-1 \Leftrightarrow 1+\sqrt{e^{y^2-4}-1} = x$, så $f^{-1}(y) = 1+\sqrt{e^{y^2-4}-1}$.
Svar: Den sökta värdemängden är $V_f = [2, \infty[$ och $f^{-1}(y) = 1+\sqrt{e^{y^2-4}-1}$.

6. Med Eulers formler får vi
$\cos(3x)\sin^2(x) = \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} \cdot \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^2}{(2i)^2} = -\frac{1}{8}(e^{3ix}+e^{-3ix})(e^{2ix}-2+e^{-2ix})$
$= -\frac{1}{8}(e^{5ix}-2e^{3ix}+e^{ix}+e^{-ix}-2e^{-3ix}+e^{-5ix})$
$= -\frac{1}{4}\big(\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2} - 2\cdot\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\big)$
$= -\frac{1}{4}\big(\cos(5x)-2\cos(3x)+\cos(x)\big) = -\frac{\cos(5x)}{4} + \frac{\cos(3x)}{2} - \frac{\cos(x)}{4}$

7. Vi inför $re^{iv} = z+\frac{\sqrt{3}}{2}i-2$, då kan ekvationen skrivas $r^{50}e^{50iv} = e^{\frac{i\pi}{2}}$, vilket ger $r = 1$ och $50v = \frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow v = \frac{\pi+4k\pi}{100}$ där $k = 0, 1, 2, \ldots 49$. Ekvationens lösningar kan alltså skrivas $z = 2-\frac{\sqrt{3}}{2}i+e^{i\frac{\pi+4k\pi}{100}} = 2-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\cos(\frac{\pi+4k\pi}{100})+i\sin(\frac{\pi+4k\pi}{100})$. Villkoret $\mathrm{Im}(z) > 0$ blir därför $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin(\frac{\pi+4k\pi}{100}) > 0 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi+4k\pi}{100}) > \frac{\sqrt{3}}{2}$, vilket betyder att $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi+4k\pi}{100} < \frac{2\pi}{3}$. Vi multiplicerar leden med $\frac{300}{\pi}$ och får $100 < 3+12k < 200 \Leftrightarrow 97 < 12k < 197$, och eftersom k är ett heltal får vi $k \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$. Alltså har vi visat att det finns 8 lösningar med positiv imaginärdel.
Svar: 8 av de 50 lösningarna har positiv imaginärdel.

Kommentar: Lösningarna ligger på en cirkel med radie 1 och centrum i $2-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ i talplanet, ovandelen av cirkeln sticker upp ovanför reella axeln, det är här de 8 lösningarna ligger.