Lösningsförslag

Dugga 2 på Grunk 91MA13/92MA13 den 2023-11-20 kl 08.00-12.00

---

1. (a) $x = 1 + \sqrt{3x-3} \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{3x-3} \Rightarrow (x-1)^2 = 3x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1) = 0$. Eftersom vi använde implikation i ett steg testar vi lösningarna och finner att både $x = 4$ och $x = 1$ är lösningar.

   (b) $|z| = \frac{|1+i|^7 \cdot |2i|}{|\sqrt{3}+i| \cdot |3-3i|} = \frac{\sqrt{2}^7 \cdot 2}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{8}{3}$
   $\arg(z) = 7\arg(1+i) + \arg(2i) - \arg(\sqrt{3}+i) - \arg(3-3i) = 7\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{4}) = 2\pi + \frac{\pi}{3}$. Vi subtraherar ett varv för att få ett enklare

   Svar: (a) $x = 1$ eller $x = 4$, (b) $|z| = \frac{8}{3}$ och $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$.

2. (a) Vi ser att $x > 0$ krävs för att alla logaritmfunktioner ska vara definierade. För $x > 0$ exponentierar vi båda sidor och får ekvationen
   $x(x+1)^2 = x^2 + 7x \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x = x^2 + 7x \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow x(x+3)(x-2) = 0$. Eftersom $x > 0$ är endast $x = 2$ en lösning.

   (b) Med $t = 2^x$ blir ekvationen $2t^2 + 3t - 20 = 0 \Leftrightarrow (2t-5)(t+4) = 0$, vilket ger $t = -4$ eller $t = \frac{5}{2}$. När vi går tillbaka till variabeln x noterar vi att $2^x = -4$ saknar lösning, och att $2^x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x\ln(2) = \ln(\frac{5}{2}) = \ln(5) - \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(5)}{\ln(2)} - 1$

   Svar: (a) $x = 2$, (b) $x = \frac{\ln(5)}{\ln(2)} - 1$.

3. (a) $\tan(x) - 2\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x)\big(\frac{1}{\cos(x)} - 2\big) = 0$ så $\sin(x) = 0$ eller $\cos(x) = \frac{1}{2}$. Detta ger lösningarna $x = n\pi$ eller $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ där $n \in \mathbb{Z}$.

   (b) $\arccos(\sin(\frac{5\pi}{3})) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{3})) = \arccos(\cos(-\frac{7\pi}{6})) = \arccos(\cos(\frac{5\pi}{6})) = \frac{5\pi}{6}$.

   (c) Låt $\alpha = \arctan(5) + \arctan(7)$. Med additionsformeln för tangens får vi $\tan(\alpha) = \frac{5+7}{1-5\cdot 7} = \frac{12}{-34} = -\frac{6}{17}$, så $\alpha = \arctan(-\frac{6}{17}) + n\pi$. Eftersom båda termerna i α ligger på $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ så gäller $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ vilket ger $n = 1$ och $\alpha = \pi - \arctan(\frac{6}{17})$.

   Svar: (a) $x = n\pi$ eller $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ där $n \in \mathbb{Z}$. (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $\pi - \arctan(\frac{6}{17})$

4. Vi ansätter $\cos(x) - \sin(x) = C\sin(x+v) = C\sin(v)\cos(x) + C\cos(v)\sin(x)$ vilket ger $C\sin(v) = 1$ och $C\cos(v) = -1$, vilket ger $C = \sqrt{2}$ och vi kan ta $v = \frac{3\pi}{4}$. Ekvationen i uppgiften kan alltså skrivas $\sqrt{2}\sin(x + \frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ vilket i sin tur ger att $x + \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi \Leftrightarrow x = -\frac{13\pi}{12} + 2n\pi$ eller $x + \frac{3\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi \Leftrightarrow x = -\frac{17\pi}{12} + 2n\pi$ där $n \in \mathbb{Z}$. För att förenkla svaret något adderar vi 2π till båda och svarar med:
   Svar: $x = \frac{11\pi}{12} + 2n\pi$ eller $x = \frac{7\pi}{12} + 2n\pi$ där $n \in \mathbb{Z}$.

5. Vi ser att $x \geq 0$ för att rötterna ska vara definierade, så $\sqrt{x} + 5$ är positivt. För att logaritmfunktionens argument ska vara positivt behöver därför $\sqrt{x} - 3 > 0$, alltså $x > 9$. Vi får alltså $D_f =]9, \infty[$. För att hitta ett uttryck för inversen använder vi att $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, så vi sätter $y = f(x)$ och löser ut x som funktion av y: För $x \in D_f$ har vi $y = \ln(\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3}) \Leftrightarrow e^y = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3} \Leftrightarrow \sqrt{x}e^y - 3e^y = \sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow \sqrt{x}(e^y - 1) = 3e^y + 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3e^y+5}{e^y-1} \Leftrightarrow x = \big(\frac{3e^y+5}{e^y-1}\big)^2$. Detta visar att inversen ges av uttrycket $f^{-1}(y) = \big(\frac{3e^y+5}{e^y-1}\big)^2$.
   Svar: $D_f =]9, \infty[$ och $f^{-1}(y) = \big(\frac{3e^y+5}{e^y-1}\big)^2$.

6. Sätt $z = re^{iv}$. Högerledet kan skrivas som $-2 + \sqrt{12}i = 4(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})i = 4e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Ekvationen ger därför $r^4 = 4 \Leftrightarrow r = \sqrt{2}$ och $4v = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow v = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$ där $k = 0, 1, 2, 3$ ger olika lösningar. Eftersom $z = \sqrt{2}e^{iv} = \sqrt{2}\cos(v) + i\sqrt{2}\sin(v)$ så blir lösningarna explicit:
Svar: Ekvationens fyra lösningar är
$z_1 = \sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + i\sqrt{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$
$z_2 = -\sqrt{2}\frac{1}{2} + i\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$
$z_3 = -\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - i\sqrt{2}\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$
$z_4 = \sqrt{2}\frac{1}{2} - i\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$

7. Med variabelbytet $t = e^{iz}$ får vi $2 = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{t+t^{-1}}{2} \Leftrightarrow 4t = t^2 + 1 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-2)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}$.
Så $e^{iz} = 2\pm\sqrt{3}$. Med $z = a+bi$ fås $e^{ia}e^{-b} = e^{-b}(\cos(a)+i\sin(a)) = 2\pm\sqrt{3}$ vilket ger $e^{-b} = 2\pm\sqrt{3}$, alltså $b = -\ln(2\pm\sqrt{3}) = \ln(\frac{1}{2\pm\sqrt{3}}) = \ln(\frac{2\pm\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2}) = \ln(2\pm\sqrt{3})$ och $a = 2\pi k$ där $k \in \mathbb{Z}$ eftersom högerledet är positivt och reellt. Så sammanfattningsvis har vi:
Svar: Ekvationens lösningar är $z = 2\pi k + i\ln(2\pm\sqrt{3})$ där $k \in \mathbb{Z}$.