Lösningsförslag

Dugga 2 på Grunk 91MA13/92MA13 den 2024-10-24 kl 14.00-18.00

---

1. (a) Den generella formeln för en cirkel med centrum i (a, b) och med radie r är $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, i vårt fall får vi $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$.

   (b) $|z| = |\frac{(1+i)^9(2+i)}{(1-i)^5}| = \frac{|1+i|^9|2+i|}{|1-i|^5}| = \frac{\sqrt{2}^9\sqrt{5}}{\sqrt{2}^5} = \sqrt{2}^4\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

   (c) Båda sidorna är positiva, vi logaritmerar och får:
   $\ln(2) + x\ln(3) = x\ln(5) \Leftrightarrow x(\ln(5) - \ln(3)) = \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(5)-\ln(3)}$
   Svar: $a)$ $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ $\quad b)$ $4\sqrt{5}$ $\quad c)$ $x = \frac{\ln(2)}{\ln(5)-\ln(3)}$.

2. (a) $\arccos(\sin(\frac{5\pi}{8})) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{8})) = \arccos(\cos(-\frac{\pi}{8})) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{8})) = \frac{\pi}{8}$, sista steget gäller eftersom $0 \leq \frac{\pi}{8} \leq \pi$.

   (b) Låt $a = \cos(\arcsin(\frac{2}{3}))$. Då gäller $a^2 = \cos^2(\arcsin(\frac{2}{3})) = 1 - \sin^2(\arcsin(\frac{2}{3})) = 1 - (\frac{2}{3})^2 = \frac{5}{9}$. Men eftersom $0 < \arcsin(\frac{2}{3}) < \frac{\pi}{2}$ så är $a = \cos(\arcsin(\frac{2}{3}))$ positivt, alltså får vi $a = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

   (c) Låt $b = \arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(-2)$. Enligt additionsregeln för tangens blir
   $\tan(b) = \frac{\tan(\arctan(\frac{1}{3}))+\tan(\arctan(-2))}{1-\tan(\arctan(\frac{1}{3}))\cdot\tan(\arctan(-2))} = \frac{\frac{1}{3}-2}{1+\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = -1$.
   Så $\tan(b) = -1 \Rightarrow b = \arctan(-1) + k\pi = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ där $k \in \mathbb{Z}$. För att ta reda på vad k är noterar vi att $0 < \arctan(\frac{1}{3}) < \frac{\pi}{4}$ och $-\frac{\pi}{2} < \arctan(-2) < -\frac{\pi}{4}$, därför måste $-\frac{\pi}{2} < b < 0$ så $k = 0$ och $b = -\frac{\pi}{4}$

   Svar: $a)$ $\frac{\pi}{8}$ $\quad b)$ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\quad c)$ $-\frac{\pi}{4}$.

3. (a) Vi ser att $2 < x < 9$ för att alla logaritmer ska vara definierade. För sådana x kan i vi exponentiera bägge led och vi får
   $\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln(9-x) \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 9-x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4^2 \Leftrightarrow x = -1 \pm 4 \Leftrightarrow x = 3$ eller $x = -5$. Enligt vårt villkor uppfyller endast $x = 3$ ursprungsekvationen.
   Svar: $x = 3$ är ekvationens enda lösning.

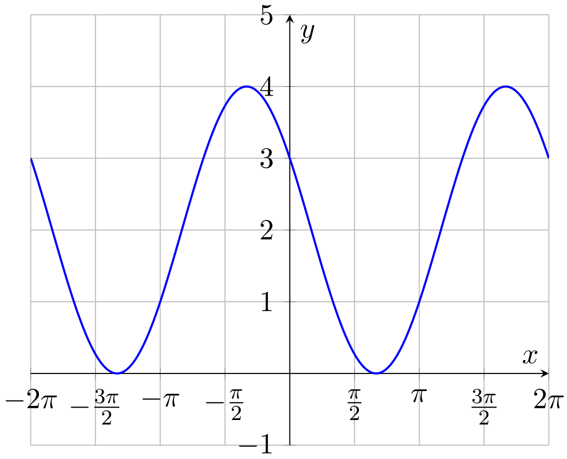
   (b) Vi utgår från vänsterledet och förenklar tills vi får högerledet:

$$4\cos^3(x) = 4\Big(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\Big)^3 = 4\Big(\frac{(e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2(e^{-ix}) + 3(e^{ix})(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3}{8}\Big)$$

$$= \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{2} = \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 3\cdot\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(3x) + 3\cos(x).$$

4. Vi skriver ihop cosinus- och sinus-termen med hjälpvinkelmetoden. Vi ansätter $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = C\sin(x+v)$. Eftersom $\sin(x+v) = \sin(x)\cos(v) + \cos(x)\sin(v)$ så får vi villkoren $C\sin(x) = 1$ och $C\cos(x) = -\sqrt{3}$. Trigonometriska ettan ger $C^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 = 4$, så vi kan ta $C = 2$, och $v = \frac{5\pi}{6}$. Vi har nu $f(x) = 2\sin(x + \frac{5\pi}{6}) + 2$, så dess graf får vi genom att utgå från grafen för sinusfunktionen, fast med dubbel

amplitud, och förskjuten två steg uppåt och $\frac{5\pi}{6}$ åt vänster:



5. Den naturliga definitionsmängden för g består av alla x där argumentet för logaritmen är positivt, via exempelvis teckentabell får vi att detta gäller då $1 < x < 3$. Vi sätter $y = g(x)$, för $x \in]1, 3[$ får vi då $e^y = \frac{3-x}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)e^y = 3 - x \Leftrightarrow xe^y - e^y = 3 - x \Leftrightarrow x(e^y + 1) = e^y + 3 \Leftrightarrow x = \frac{e^y+3}{e^y+1}$. Detta visar att $g^{-1}(y) = \frac{e^y+3}{e^y+1}$.
Svar: $D_g =]1, 3[$ och $g^{-1}(y) = \frac{e^y+3}{e^y+1}$.

6. Variabelbytet $\sin(x) = t$, samt omskrivningen $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ ger

$$2t^3 + 7(1 - t^2) + 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - 7t^2 + 2t + 3 = 0.$$

Vi gissar en rot till ekvationen och finner att $t = 1$ fungerar, så vi har en faktor $t - 1$ i vänsterledet enligt faktorsatsen. Polynomdivision (ej utrskriven i detta lösningsförslag) visar att

$$2t^3 - 7t^2 + 2t + 3 = (t - 1)(2t^2 - 5t - 3).$$

Det återstår att hitta nollställena till $2t^2 - 5t - 3$, vi bryter ut 2 och kvadrartkompletterar:

$$t^2 - \tfrac{5}{2}t - \tfrac{3}{2} = (t^2 - \tfrac{5}{4})^2 - \tfrac{25}{16} - \tfrac{24}{16} = (t^2 - \tfrac{5}{4})^2 - (\tfrac{7}{4})^2 = (t - \tfrac{5}{4} + \tfrac{7}{4})(t - \tfrac{5}{4} - \tfrac{7}{4}) = (t + \tfrac{1}{2})(t - 3).$$

Så vår ekvation kan skrivas $2(t + \frac{1}{2})(t-3)(t-1) = 0$, så $t \in \{3, 1, -\frac{1}{2}\}$. För att återgå till vår ursprungliga variabel x löser vi ekvationen $\sin(x) = t$ för våra tre t-värden. $\sin(x) = 3$ saknar reella lösningar, $\sin(x) = 1$ ger $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, och $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ ger $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ eller $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, där $k \in \mathbb{Z}$.
Svar: Ekvationens lösningar är:
$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,
$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$,
$x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, där $k \in \mathbb{Z}$.
Kommentar: Lösningarna kan alternativt skrivas ihop till $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$ där $k \in \mathbb{Z}$.

7. (a) För $n = 4$ blir ekvationen $(z + \frac{i}{2})^4 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Vi inför $z + \frac{i}{2} = re^{iv}$ och får $(re^{iv})^4 = e^{\frac{2\pi i}{3}} \Leftrightarrow r^4 e^{4iv} = 1 \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$ vilket ger $r = 1$ och $4iv = \frac{2\pi i}{3} + 2k\pi i \Leftrightarrow v = \frac{\pi(1+3k)}{6}$ där $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Detta ger fyra lösningar:

Svar:

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} - \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} - \frac{i}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$z_3 = e^{i\frac{7\pi}{6}} - \frac{i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i$

$z_4 = e^{i\frac{5\pi}{3}} - \frac{i}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

(b) Samma metod som ovan fast med godtyckligt n ger

$$z = e^{i\frac{2\pi+6k\pi}{3n}} - \frac{i}{2} = \cos(\frac{2\pi + 6k\pi}{3n}) + i\sin(\frac{2\pi + 6k\pi}{3n}) - \frac{i}{2} \text{ där } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

För att en sådan lösnings ska vara reell ska $0 = \text{Im}(z) = \sin(\frac{2\pi+6k\pi}{3n}) - \frac{1}{2}$, vilket ger $\frac{2\pi+6k\pi}{3n} = \frac{\pi}{6}$ eller $\frac{2\pi+6k\pi}{3n} = \frac{5\pi}{6}$. Det första fallet ger $n = 4 + 12k$ och det andra fallet ger $n = \frac{4+12k}{5}$. Eftersom k är ett heltal måste alltså n vara ett heltal av form $4 + 12k$, alltså ett tal vars rest blir 4 vid division med 12.

Svar: Ekvationen har en reell lösning för $n = 4k + 12$ där $k \in \mathbb{N}$, alltså för $n = 4, 16, 28, 40, \ldots$

Kommentar: För varje n ligger lösningarna på en cirkel med centrum vid $-\frac{i}{2}$ och med radie 1, högre n ger fler lösningar på cirkeln. Vår lösning visar att för just $n = 4, 16, 28, 40, \ldots$ så ligger (minst) en lösning på reella axeln i komplexa talplanet, för sådana n är $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en rell lösning. För $n = 16$ och $n = 4$ ser det ut såhär: