

Lösningsförslag

Dugga 2 (STN2) på Grunk 91MA13/92MA13 den 2025-11-10 kl 14.00-18.00

1. (a) $z = \frac{1+i}{1-i} + 1 = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} + 1 = \frac{2i}{2} + 1 = 1 + i$ så ett argument är $\frac{\pi}{4}$.
 (b) $\frac{4 \ln(3)}{2!} + \frac{8 \ln(4)}{3!} + \frac{16 \ln(5)}{4!} + \dots + \frac{1024 \ln(11)}{10!} = \sum_{k=2}^{10} \frac{2^k \ln(k+1)}{k!}$ (exempelvis)
 (c) Binomialsatsen ger $(x+2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k 2^{10-k}$, och x^7 -termen fås för $k = 7$, den sökta koefficienten är därför $\binom{10}{7} 2^3 = \frac{10!}{7!3!} \cdot 8 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} \cdot 8 = 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8 = 960$

Svar: (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\sum_{k=2}^{10} \frac{2^k \ln(k+1)}{k!}$ (c) 960

2. (a) Eftersom $e^{i\pi} = -1$ får vi: $\sin(\pi - x) = \frac{e^{i(\pi-x)} - e^{-i(\pi-x)}}{2i} = \frac{e^{i\pi} e^{-ix} - e^{-i\pi} e^{ix}}{2i} = \frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{2i} = \sin(x)$ vilket skulle visas.
 (b) Vi utgår från högerledet och förenklar med Eulers formler:
 $4\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 - 3\cos(x) = 4\left(\frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8}\right) - 3\cos(x) = \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 3\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} - 3\cos(x) = \cos(3x) + 3\cos(x) - 3\cos(x) = \cos(3x)$, vilket skulle visas.

3. (a) $\arccos(\sin(\frac{5\pi}{7})) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{7})) = \arccos(\cos(-\frac{3\pi}{14})) = \arccos(\cos(\frac{3\pi}{14})) = \frac{3\pi}{14}$
 Här använde vi räknereglerna $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$, samt att $\arccos(\cos(x)) = x$ om och endast om $x \in [0, \pi]$.
 (b) Låt $\alpha = \arctan(4) + \arctan(\frac{5}{3})$. Enligt additionslagen för tangens har vi $\tan(\alpha) = \frac{4 + \frac{5}{3}}{1 - 4 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{\frac{17}{3}}{-\frac{17}{3}} = -1$, vilket ger $\alpha = -\frac{\pi}{4} + n\pi$ för något heltal n . Men eftersom både 4 och $\frac{5}{3}$ är större än 1 så ligger både $\arctan(4)$ och $\arctan(\frac{5}{3})$ på intervallet $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ och därför ligger α på intervallet $]\frac{\pi}{2}, \pi[$, vilket leder till att $n = 1$ ovan, och $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

Svar: (a) $\frac{3\pi}{14}$ (b) $\frac{3\pi}{4}$

4. Enligt hjälpvinkelmetoden vet vi att vi kan skriva $\cos(x) - \sin(x) = C \sin(x + v)$ för några tal C och v . Eftersom $C \sin(x + v) = C \sin(v) \cos(x) + C \cos(v) \sin(x)$, så får vi genom att jämföra koefficienter för $\sin(x)$ och $\cos(x)$ i den första ekvationen $\begin{cases} C \sin(v) = 1 \\ C \cos(v) = -1 \end{cases}$. Trigonometriska ettan ger $C^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$, så vi väljer $C = \sqrt{2}$, och vårt ekvationssystem kan skrivas $\begin{cases} \sin(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(v) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$, så vi kan välja $v = \frac{3\pi}{4}$. Vi har nu visat att $\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{3\pi}{4})$. Ekvationen i uppgiften kan alltså skrivas som $\sqrt{2} \sin(x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ vilket ger $x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ eller $x + \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ där $n \in \mathbb{Z}$. Vi löser ut x och får att $x = -\frac{7\pi}{12} + 2n\pi$ eller $x = \frac{\pi}{12} + 2n\pi$.

Svar: $x = -\frac{7\pi}{12} + 2n\pi$ eller $x = \frac{\pi}{12} + 2n\pi$ där $n \in \mathbb{Z}$.

5. Vi bestämmer först definitionsmängden för f . Vi har:

$$x \in D_f \Leftrightarrow \frac{8-\ln(x^2)}{\ln(x)-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(4-\ln(x))}{\ln(x)-3} \geq 0 \Leftrightarrow 3 < \ln(x) \leq 4 \Leftrightarrow e^3 < x \leq e^4, \text{ så } D_f =]e^3, e^4].$$

För $x \in D_f$ sätter vi $y = f(x)$, och löser ut x som funktion av y :

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{8-\ln(x^2)}{\ln(x)-3}} \Rightarrow y^2 = \frac{8-\ln(x^2)}{\ln(x)-3} \Leftrightarrow y^2 \ln(x) - 3y^2 = 8 - 2\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x)(y^2 + 2) = 3y^2 + 8 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3y^2+8}{y^2+2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3y^2+8}{y^2+2}}$$

Svar: $D_f =]e^3, e^4]$ och $f^{-1}(y) = e^{\frac{3y^2+8}{y^2+2}}$.

6. (a) Vi skriver högerledet på polär form och sätter $z = a + bi$. Ekvationen kan nu skrivas $e^a e^{bi} = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$. Belopp och argument av dessa tal ska vara lika vilket direkt ger $e^a = \sqrt{2} \Rightarrow a = \ln(\sqrt{2}) = \frac{\ln(2)}{2}$ och $b = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ där $n \in \mathbb{Z}$.
- (b) Vi inför $t = e^x$ och får $t^3 - 2t^2 - 9t + 18 = 0$. Genom att gissa rötter ser vi att $t = 2$ är en lösning, så vänsterledet är delbart med $t - 2$ enligt faktorsatsen. Polynomdivision ger:

$$\begin{array}{r} t^2 \qquad - 9 \\ t-2 \overline{) t^3 - 2t^2 - 9t + 18} \\ \underline{-t^3 + 2t^2} \\ -9t + 18 \\ \underline{9t - 18} \\ 0 \end{array}$$

Så vår ekvation är ekvivalent med $(t-2)(t^2-9) = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+3)(t-3) = 0 \Leftrightarrow t \in \{2, 3, -3\}$. Eftersom $t = e^x$ så får vi $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$, $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$, men $e^x = -3$ saknar reella lösningar.

Svar: (a) $z = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\pi}{4}i + 2n\pi i$ där $n \in \mathbb{Z}$ (b) $x = \ln(2)$ eller $x = \ln(3)$

7. Vi tar $x = \frac{\pi}{5}$ i den angivna formeln, detta ger $0 = \sin(\pi) = 16 \sin^5(\frac{\pi}{5}) - 20 \sin^3(\frac{\pi}{5}) + 5 \sin(\frac{\pi}{5})$. Vi sätter $t = \sin(\frac{\pi}{5})$ och får att $16t^5 - 20t^3 + 5t = 0$. Här noterar vi direkt att eftersom $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$ så har vi $0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$, så vi kan dividera ekvationen med t och vi får $16t^4 - 20t^2 + 5 = 0$. Vi dividerar med 16 och sätter $s = t^2$ för att nå andragrads-ekvationen $s^2 - \frac{5}{4}s + \frac{5}{16} = 0 \Leftrightarrow (s - \frac{5}{8})^2 - \frac{25}{64} + \frac{20}{64} = 0 \Leftrightarrow (s - \frac{5}{8})^2 = \frac{5}{64} \Leftrightarrow s = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$, vilket ger $t = \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}}$ (eftersom $t > 0$). Men $t < \frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$ så måste vi ha $t = \sin(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$.

Svar: $\sin(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$