Lösningsförslag matematisk grundkurs 2022-01-07

1. (a) Vi kvadratkompletterar vänsterledet i ekvationen och finner att

$$\begin{aligned} x^2+y^2=y-3x \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+3x+y^2-y=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Medelpunkt är alltså $(-3/2,\ 1/2)$ och radien $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

(b) Genom att gissa en rot finner vi att $z=1$ är ett nollställe, så polynomdivision med $z-1$ visar att

$$p(z)=(z-1)\left(-9z^2-6z-5\right).$$

Vi ser att

$$\begin{aligned} -9z^2-6z-5 &= -9\left(z^2+\frac{2}{3}z+\frac{5}{9}\right)=-9\left(\left(z+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{9}\right) \\ &= -9\left(z+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i\right)\left(z+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i\right), \end{aligned}$$

så faktoriseringen blir därmed

$$p(z)=-9(z-1)\left(z+\frac{1+2i}{3}\right)\left(z+\frac{1-2i}{3}\right)=(1-z)\left(3z+1+2i\right)\left(3z+1-2i\right).$$

Svar: (a) $(-3/2,\ 1/2)$; $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ (b) $p(z)=(1-z)(3z+1+2i)(3z+1-2i)$.

2. **Svar**:
(a) $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$, eller $x=\dfrac{\pi}{6}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$, eller $x=\dfrac{5\pi}{6}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$,
(b) $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ (c) $\dfrac{3\pi}{5}$.

3. (a) För att vänsterledet ska vara definierat måste vi undvika nolldivisioner, så vi ser direkt att $x\neq 0$ och $x\neq -1/2$. Vidare så ser vi att

$$2+\frac{1}{2+\frac{1}{x}}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4+\frac{2}{x}+1}{2+\frac{1}{x}}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 5+\frac{2}{x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{2}{5},$$

så $x\neq -\dfrac{2}{5}$ är nödvändigt. Med andra ord blir $D_f=\mathbf{R}\setminus\{\,-1/2,\ -2/5,\ 0\,\}$.
Om $x\in D_f$ så gäller att

$$\begin{aligned} y=f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y=\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2+\frac{x}{2x+1}}=\frac{2x+1}{4x+2+x}=\frac{2x+1}{5x+2} \\ &\Leftrightarrow \quad (5x+2)y=2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x(5y-2)=1-2y \\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{1-2y}{5y-2} \end{aligned}$$

Ett uttryck för inversen ges därmed av $f^{-1}(y)=\dfrac{1-2y}{5y-2}$.

(b) Kända räknelagar för ln och exp visar att

$$\frac{\ln\frac{x}{e}\cdot\ln\frac{1}{x}}{\ln x^2 - e^{\ln 2}}\cdot\frac{e^{x+\ln 3}+3\ln e^2}{e^x+e^{\ln 2}} = \frac{(\ln x - 1)(-\ln x)}{2\ln x - 2}\cdot\frac{3e^x+6}{e^x+2} = \frac{-\ln x}{2}\cdot 3.$$

Svar: (a) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{\,-1/2,\ -2/5,\ 0\}$; $f(x) = \dfrac{2x+1}{5x+2}$; $f^{-1}(y) = \dfrac{1-2y}{5y-2}$ (b) $-\dfrac{3\ln x}{2}$.

4. (a) För cos gäller $D_{\cos} = \mathbf{R}$ samt $V_{\cos} = [-1,1]$ och för arccos gäller $D_{\mathrm{arccos}} = [-1,1]$ samt $V_{\mathrm{arccos}} = [0,\pi]$.

   (b) Notera att

$$(z-i)^{10} = -1 \quad\Leftrightarrow\quad (z-i)^{10} = e^{i\pi}.$$

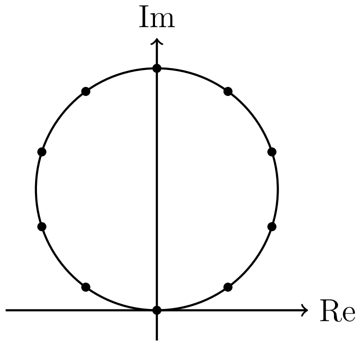
Låt nu $z - i = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

$$(z-i)^{10} = r^{10}e^{i10\varphi} = e^{i\pi} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} r^{10} = 1,\ r \geq 0, \\ 10\varphi = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Detta visar att $r = 1$ och $\varphi = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{n\pi}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$z = i + e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{n\pi}{5}\right)}, \quad n = 0,1,2,3,\ldots,9.$$



Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 10$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.

Svar: (a) $D_{\cos} = \mathbf{R}$, $V_{\cos} = [-1,1]$, $D_{\mathrm{arccos}} = [-1,1]$ och $V_{\mathrm{arccos}} = [0,\pi]$
(b) $z = i + e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{n\pi}{5}\right)}$, $n = 0,1,2,3,\ldots,9$.

5. (a) Logaritmerna i vänsterledet är definierade då $x > 0$ och vi ser att $x \neq 1$ är nödvändigt för att undvika nolldivisioner, så låt $x > 0$ med $x \neq 1$. För dessa x gäller att

$$\ln\frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad -\ln x + \frac{1}{\ln x} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad (\ln x)^2 + 2\ln x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow\quad (1+\ln x)^2 = 2.$$

Alltså måste

$$1 + \ln x = \pm\sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad x = \exp\left(-1 \pm \sqrt{2}\right)$$

eftersom ln är injektiv. Båda alternativen uppfyller kraven.

   (b) Då ln är injektiv följer det att

$$(e^x)^2 + (e^2)^x = e^{x^2} \quad\Leftrightarrow\quad 2e^{2x} = e^{x^2} \quad\Leftrightarrow\quad 2x + \ln 2 = x^2$$
$$\Leftrightarrow\quad (x-1)^2 = 1 + \ln 2 \quad\Leftrightarrow\quad x = 1 \pm \sqrt{1+\ln 2}.$$

Svar: (a) $\exp\left(-1 \pm \sqrt{2}\right)$ (b) $1 \pm \sqrt{1+\ln 2}$.

6. Låt $u = \arccos\left(-\dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)$. Då är $u \in]\pi/2, \pi[$ ty $-1 < -4/\sqrt{17} < 0$ och arccos är strängt avtagande. Alltså blir

$$\cos u = -\frac{4}{\sqrt{17}}$$

och

$$\sin^2 u = 1 - \cos^2 u = 1 - \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2 = 1 - \frac{16}{17} = \frac{1}{17},$$

så

$$\sin u = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

med positivt tecken då $\sin u > 0$ om $u \in]\pi/2, \pi[$. Alltså blir

$$\tan u = \frac{1/\sqrt{17}}{-4/\sqrt{17}} = -\frac{1}{4}.$$

Enligt en additionsformel för tangens finner vi nu att

$$\tan v = \tan\left(\arctan\frac{1}{2} - u\right) = \frac{\frac{1}{2} - \tan u}{1 + \frac{1}{2}\tan u} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{6}{7}.$$

Alltså gäller att

$$\tan v = \frac{6}{7} \quad \Leftrightarrow \quad v = \arctan\left(\frac{6}{7}\right) + n\pi,\ n \in \mathbf{Z},$$

där vi måste bestämma heltalet n. Vi uppskattar storleken på ingående arcusfunktioner:

$$0 < \arctan\left(\frac{6}{7}\right) < \frac{\pi}{2},$$

$$0 < \arctan\frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$$

samt

$$\frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right) < \pi,$$

så

$$-\pi = 0 - \pi < v < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Här har vi använt att arctan är strängt växande, arccos strängt avtagande, samt kända standardvinklar. Därmed följer det att $n = -1$ är nödvändigt. Den eftersökta vinkeln är alltså

$$v = \arctan\left(\frac{6}{7}\right) - \pi.$$

Svar: $v = \arctan\left(\dfrac{6}{7}\right) - \pi$.

7. Notera att $2\cos^2 kx = 1 + \cos 2kx$ så

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^2 kx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(1 + \cos 2kx) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{i2kx}\right)$$

eftersom $\operatorname{Re} e^{i2kx} = \cos 2kx$. Summan i realdelen ovan är geometrisk med kvoten e^{i2x} och n termer, så den kan vi räkna ut (om $x \neq m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, ty annars blir kvoten 1):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} e^{i2kx} &= e^{i2x} \sum_{k=1}^{n} e^{i2(k-1)x} = e^{i2x} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i2kx} = e^{i2x} \frac{e^{i2nx} - 1}{e^{i2x} - 1} = e^{ix} \frac{e^{i2nx} - 1}{e^{ix} - e^{-ix}} \\ &= \frac{1}{2i \sin x} \left(e^{i(2n+1)x} - e^{ix} \right) = \frac{-i}{2 \sin x} \left(e^{i(2n+1)x} - e^{ix} \right).\end{aligned}$$

Från detta följer att

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{i2kx} \right) = \frac{1}{2 \sin x} \operatorname{Im} \left(e^{i(2n+1)x} - e^{ix} \right) = \frac{\sin(2n+1)x - \sin x}{2 \sin x},$$

så

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^2 kx = \frac{n}{2} + \frac{\sin(2n+1)x - \sin x}{4 \sin x}, \quad x \neq m\pi.$$

Svar: $\dfrac{2n-1}{4} + \dfrac{\sin(2n+1)x}{4 \sin x}$, $x \neq m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$. Om $x = m\pi$ blir summan lika med antalet termer: n.