Lösningsförslag matematisk grundkurs 2023-01-07

1. (a) Vi stuvar om lite i olikheten och finner att

$$\frac{x-1}{x-2} < \frac{x-3}{x-5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x-5)-(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-5)} < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x-1}{(x-2)(x-5)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{(x-2)(x-5)} > 0$$

där vi nu gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		-1		2		5	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{(x-2)(x-5)}$	$-$	0	$+$	☠	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då $-1 < x < 2$ eller $x > 5$.

(b) Summan är geometrisk med $90-10+1 = 81$ termer, kvoten $2^{-3} = 1/8$ och första term $7 \cdot 2^{-30}$, så

$$\sum_{k=10}^{90} 7 \cdot 2^{-3k} = 7 \cdot 2^{-30} \cdot \frac{1-2^{-3\cdot 81}}{1-2^{-3}} = 7 \cdot 2^{-30} \cdot \frac{1-2^{-243}}{7/8} = 2^{-27}\left(1-2^{-243}\right).$$

(c) Eftersom $|\sqrt{3}-i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = \sqrt{4} = 2$ så ser vi att

$$\sqrt{3}-i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2e^{-i\pi/6},$$

där vi enklast ser omskrivningen genom att rita en enhetscirkel (rita en ordentlig figur!). Därmed följer det att

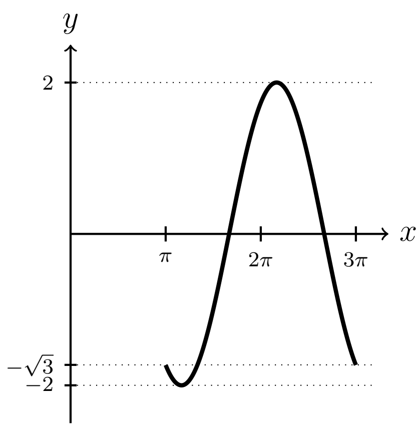
$$(\sqrt{3}-i)^{99} = 2^{99}e^{-i99\pi/6} = 2^{99}e^{-i(16\pi+\pi/2)} = 2^{99}e^{-i\pi/2} = -2^{99}i.$$

Svar: (a) $-1 < x < 2$ eller $x > 5$ (b) $2^{-27}\left(1-2^{-243}\right)$ (c) $-2^{99}i$.

2. **Svar**:

(a) $x = \frac{\pi}{50} + \frac{n\pi}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller
$x = -\frac{\pi}{20} - \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$

(b)



(c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

3. Enligt kända trigonometriska formler så ser vi att

$$4\cos^2 3x \sin 2x = 4\left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)\sin 2x = 2\sin 2x + 2\cos 6x \sin 2x.$$

En Euler-omskrivning visar sedan att

$$\begin{aligned} 2\cos 6x \sin 2x &= 2\left(\frac{e^{i6x}+e^{-i6x}}{2}\right)\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i8x}-e^{i4x}+e^{-i4x}-e^{-i8x}\right) \\ &= \sin 8x - \sin 4x, \end{aligned}$$

så ekvationen given i uppgiften kan ekvivalent skrivas om enligt

$$\begin{aligned} 4\cos^2 3x \sin 2x = \sin 2x + \sin 8x \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sin 2x + \sin 8x - \sin 4x = \sin 2x + \sin 8x \\ &\Leftrightarrow \quad \sin 2x = \sin 4x \\ &\Leftrightarrow \quad 2x = 4x + 2\pi n \text{ eller } 2x = \pi - 4x + 2\pi n, \end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$. Alltså kommer lösningarna ges av

$$x = -\pi n \quad \text{eller} \quad 6x = \pi + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},$$

där $n \in \mathbf{Z}$.

Svar: $x = -\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. För att $f(x)$ ska vara definierad måste

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+1} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-(x+1)}{x+1} = \frac{-1}{x+1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1$$

där vi utnyttjat att ln är strängt växande. Notera även att $x/(x+1) \geq 1 > 0$ så logaritmen är definierad då $x < -1$. Med andra ord blir $D_f =]-\infty, -1[$.

Om $x \in D_f$ så gäller att

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \sqrt{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)} \quad \Rightarrow \quad y^2 = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad e^{y^2} = \frac{x}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)e^{y^2} = x \\ &\Leftrightarrow \quad x(e^{y^2}-1) = -e^{y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{e^{y^2}}{e^{y^2}-1} = \frac{e^{y^2}}{1-e^{y^2}} \end{aligned}$$

Notera särskilt implikationen ovan! Vill vi skriva ekvivalens måste vi lägga till villkoret $y \geq 0$ Men eftersom vi finner högst en lösning för varje y, så innebär detta att f är injektiv samt att ett uttryck för inversen därmed ges av $f^{-1}(y) = \dfrac{e^{y^2}}{1-e^{y^2}}$.

Svar: $D_f =]-\infty, -1[$; $f^{-1}(y) = \dfrac{e^{y^2}}{1-e^{y^2}}$.

5. Eftersom polynomet har reella koefficienter och $z = -i$ är en rot så kommer även $z = i$ att vara en rot. Därmed måste $(z-i)(z+i) = z^2+1$ vara en faktor. En polynomdivision visar att $p(z) = (z^2+1)(-z^2+4z-9)$. Vi faktoriserar den andra faktorn:

$$-z^2+4z-9 = -\left(z^2-4z+9\right) = -\left((z-2)^2+5\right) = -\left(z-2-i\sqrt{5}\right)\left(z-2+i\sqrt{5}\right).$$

Polynomet kan därmed faktoriseras enligt

$$p(z) = -(z-i)(z+i)\left(z-2-i\sqrt{5}\right)\left(z-2+i\sqrt{5}\right)$$

och ekvationen $p(z)=0$ har lösningarna $z=\pm i$ samt $z=2\pm i\sqrt{5}$. Den reella faktoriseringen ges av

$$p(z) = -(z^2+1)(z^2-4z+9).$$

Svar: $p(z) = -(z^2+1)(z^2-4z+9)$; $z=\pm i$, $z=2\pm i\sqrt{5}$.

6. (a) Vi ser att

$$\ln\left((e^x)^2\right) = 2\ln\left(e^x\right) = 2x = \ln\left(e^{2x}\right)$$

vilket medför att

$$\left(e^x\right)^2 = e^{2x}$$

eftersom ln är injektiv.

(b) Enligt känd formel så gäller att

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

så med $t=\tan x$ kan vi ekvivalent formulera om ekvationen i uppgiften enligt

$$\frac{6t}{1-t^2}+\frac{2}{t}+3=0 \quad\Leftrightarrow\quad 6t^2+2(1-t^2)+3t(1-t^2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4t^2+2+3t-3t^3=0,$$

såvida $t\neq 0$ och $t\neq\pm 1$. Vi gissar en rot och finner att $t=2$ är ett nollställe. Polynomdivision visar sedan att

$$4t^2+2+3t-3t^3 = (t-2)\left(-3t^2-2t-1\right) = -3(t-2)\underbrace{\left(\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right)}_{\geq\frac{2}{9}>0}$$

där det enda reella nollstället är $t=2$. De eftersökta lösningarna ges därmed av

$$t=\tan x = 2 \quad\Leftrightarrow\quad x=\arctan(2)+n\pi,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Svar: (a) se ovan (b) $x=\arctan(2)+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.

7. Notera att om x är reell så gäller att $(4x^3-3x)^2\geq 0$ så $x^2\leq 1 \Leftrightarrow |x|\leq 1$ är nödvändigt för att ett reellt x ska lösa ekvationen. Med tanke på summan av kvadrater så förefaller det inte orimligt att substitutionen $x=\cos t$ kan förenkla. Eftersom $|x|\leq 1$ så kan alla reella lösningar representeras på denna form. Med hjälp av Eulers formler och binomialsatsen ser vi att

$$\begin{aligned}4\cos^3 t &= 4\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)^3 = \frac{1}{2}\left(e^{i3t}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-i3t}\right)\\ &= \cos 3t + 3\cos t,\end{aligned}$$

så

$$4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t$$

och därmed gäller att

$$\begin{aligned}\cos^2 t + \left(4\cos^3 t - 3\cos t\right)^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2 t + \cos^2 3t = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos^2 3t = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t \\ &\Leftrightarrow \quad \cos 3t = \pm \sin t,\end{aligned}$$

så endera är

$$\cos 3t = \sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \quad \Leftrightarrow \quad 3t = \pm\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

eller så är

$$\cos 3t = -\sin t = \sin(-t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \quad \Leftrightarrow \quad 3t = \pm\left(\frac{\pi}{2} + t\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Därmed finner vi

$$3t = \left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

eller

$$3t = -\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

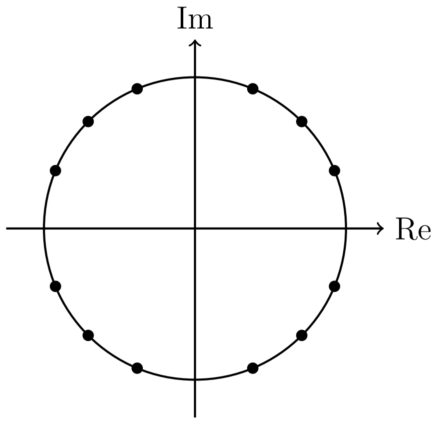
eller

$$3t = \left(\frac{\pi}{2} + t\right) + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

eller

$$3t = -\left(\frac{\pi}{2} + t\right) + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}.$$

Genom att rita en enhetscirkel kan vi se vilka vinklar som ger olika värden för cosinus.



Vi ser här att möjligheterna ges av

$$x = \pm\cos\frac{\pi}{8}, \quad x = \pm\cos\frac{\pi}{4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = \pm\cos\frac{3\pi}{8}$$

där $\pi/4$ är en standardvinkel. För de övriga vinklarna kan vi (till exempel) med hjälp av formler för dubbla vinkeln ta fram att

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 \;\Leftrightarrow\; \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \;\Leftrightarrow\; \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

eftersom $\cos(\pi/8) > 0$. På samma sätt finner vi att

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(2\cdot\frac{3\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - 1 \;\Leftrightarrow\; \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

eftersom $\cos(3\pi/8) > 0$. Ekvationen är en polynomekvation av grad 6 så det finns högst 6 olika rötter och vi har därmed nu funnit samtliga sex lösningar till ekvationen:

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad x = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Svar: $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $x = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.