Lösningsförslag

Tentamen på Matematisk grundkurs 91MA13/92MA13 den 2026-01-09 kl 14.00-19.00

---

1. (a) $\arcsin(\cos(\frac{19\pi}{8})) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{19\pi}{8})) = \arcsin(\sin(-\frac{15\pi}{8})) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{8})) = \frac{\pi}{8}$.

   (b) Summan är geometrisk, så vi har $\sum_{k=3}^{30} 4 \cdot 5^k = 4 \cdot 5^3 \frac{5^{28}-1}{5-1} = 5^{31} - 125$.

   (c) Exempelvis duger $p(z) = (z-1)(z-2-i)(z-2+i) = (z-1)((z-2)^2 - i^2) = (z-1)(z^2-4z+5) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$

   Svar: a) $\frac{\pi}{8}$ b) $5^{31} - 125$ c) $z^3 - 5z^2 + 9z - 5$

2. (a) $x + 2 + \sqrt{10+3x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{10+3x} = -x-2 \Rightarrow 10+3x = (-x-2)^2 \Leftrightarrow 10+3x = x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{24}{4} = 0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2 = (\frac{5}{2})^2 \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm 5}{2} \Leftrightarrow x = -3$ eller $x = 2$. Men vi använde en implikation ovan, och insättning visar att endast $x = -3$ löser ursprungsekvationen.

   (b) $x^3 > 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x > 0 \Leftrightarrow x(x^2-2) > 0 \Leftrightarrow x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) > 0$. Vi kallar vänsterledet $f(x)$ och gör en teckentabell:

		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$x+\sqrt{2}$	-	0	+	+	+	+	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$x-\sqrt{2}$	-	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

   Från tabellen ser vi att $f(x) > 0$ när $-\sqrt{2} < x < 0$ eller när $x > \sqrt{2}$.

   Svar: a) $x = -3$ b) $-\sqrt{2} < x < 0$ eller $x > \sqrt{2}$

3. (a) Båda sidor är positiva så vi logaritmerar och får $\ln(2^{x+3}) = \ln(3^{x+2}) \Leftrightarrow (x+3)\ln(2) = (x+2)\ln(3) \Leftrightarrow x(\ln(2) - \ln(3)) = 2\ln(3) - 3\ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{2\ln(3)-3\ln(2)}{\ln(2)-\ln(3)}$

   (b) Vi ser att vi måste ha $-1 < x < 11$ för att alla logaritmer ska vara definierade. För sådana x exponentierar vi likheten och får $2\ln(x+1) = \ln(2) + \ln(11-x) \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2(11-x) \Leftrightarrow x^2+2x+1 = 22-2x \Leftrightarrow x^2+4x-21 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 25 \Leftrightarrow x+2 = \pm 5 \Leftrightarrow x = 3$ eller $x = -7$, men endast $x = 3$ uppfyller vårt villkor ovan.

   Svar: a) $x = \frac{2\ln(3)-3\ln(2)}{\ln(2)-\ln(3)}$ b) $x = 3$

4. (a) Vi jämför koefficienter för $\sin(x)$ och $\cos(x)$ i ansatsen $-\sqrt{12}\sin(x) + 2\cos(x) = C\sin(x+v) = C\cos(v)\sin(x) + C\sin(v)\cos(x)$ och får systemet $\begin{cases} C\cos(v) = -\sqrt{12} \\ C\sin(v) = 2 \end{cases}$. Om vi kvadrerar bägge ekvationerna och adderar dem får vi via trigonometriska ettan $C^2 = \sqrt{12}^2 + 2^2 = 16$, så vi kan välja $C = 4$. Ekvationssystemet ovan blir nu $\begin{cases} \cos(v) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(v) = \frac{1}{2} \end{cases}$. Vi känner igen dessa som standardvärden, och kan t.ex. ta $v = \frac{5\pi}{6}$. Vi har alltså $g(x) = 4\sin(x + \frac{5\pi}{6})$.

   (b) $g(x) = -2 \Leftrightarrow 4\sin(x+\frac{5\pi}{6}) = -2 \Leftrightarrow \sin(x+\frac{5\pi}{6}) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ eller $x + \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\pi + 2k\pi$ eller $x = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pi + 2n\pi$ eller $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ (i sista steget ersatte vi heltalet k med $n = k-1$ för att få ett lite snyggare svar).

   Svar: a) $g(x) = 4\sin(x + \frac{5\pi}{6})$ b) $x = \pi + 2n\pi$ eller $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ där $n \in \mathbb{Z}$.

5. Vi har $x \in D_f \Leftrightarrow 4\arctan(2x+3) - \pi > 0 \Leftrightarrow \arctan(2x+3) > \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x+3 > 1 \Leftrightarrow 2x > -2 \Leftrightarrow x > -1$, så $D_f =]-1, \infty[$.

   För att hitta inversen sätter vi $y = f(x)$ och löser ut $x = f^{-1}(y)$. För $x > -1$ har vi $y = \ln(4\arctan(2x+3) - \pi) \Leftrightarrow e^y = 4\arctan(2x+3) - \pi \Leftrightarrow \frac{e^y+\pi}{4} = \arctan(2x+3) \Rightarrow \tan(\frac{e^y+\pi}{4}) = 2x+3 \Leftrightarrow x = \frac{\tan(\frac{e^y+\pi}{4})-3}{2}$.

   Svar: $D_f =]-1, \infty[$ och $f^{-1}(y) = \frac{\tan(\frac{e^y+\pi}{4})-3}{2}$.

6. Vi kvadratkompletterar: $z^2 - 2z + 2iz + 3 + 2i = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2(1-i)z + 3 + 2i = 0 \Leftrightarrow (z-(1-i))^2 - (1-i)^2 + 3 + 2i = 0 \Leftrightarrow (z-(1-i))^2 = -3-4i$. Vi ansätter $z-(1-i) = a+bi$ så att vår ekvation kan skrivas $(a+bi)^2 = -3-4i$ eller $(a^2-b^2) + 2abi = -3-4i$. Vi jämför realdel, imaginärdel, och absolutbelopp i denna ekvation och får systemet $\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$. Summan av översta och nedersta ekvationen ger $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm 1$, medan differensen av samma ekvationer ger $2b^2 = 8 \Leftrightarrow b = \pm 2$. Mellersta ekvationen visar att a och b har omvända tecken, så det finns två lösningar till systemet: $(a,b) = (-1,2)$ eller $(a,b) = (1,-2)$. Eftersom $z = a + bi + 1 - i$ får vi två lösningar till vår ursprungliga ekvation: $z = -1 + 2i + 1 - i = i$ respektive $z = 1 - 2i + 1 - i = 2 - 3i$.
   Svar: Ekvationens två lösningar är $z = i$ och $z = 2 - 3i$.

7. (a) Enligt definitionen av invers ska vi ha $e^{\mathrm{Log}(1+i)} = 1 + i$. Vi skriver högerledet på polär form och ansätter $\mathrm{Log}(1+i) = a + bi$, detta ger $e^a e^{bi} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$. Vi jämför absolutbeloppen och får att $e^a = \sqrt{2}$, alltså $a = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2)$. Vi jämför argumenten och får $b = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ där $k \in \mathbb{Z}$, men eftersom Log-funktionens värden måste ligga i definitionsmängden till f, så måste $-\pi < b \leq \pi$, alltså är $k = 0$ och $b = \frac{\pi}{4}$, så $\mathrm{Log}(1+i) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{\pi}{4}i$.

   (b) Räkneregeln gäller inte i allmänhet, exempelvis har vi

$$2\pi i = \pi i + \pi i = \mathrm{Log}(-1) + \mathrm{Log}(-1) \neq \mathrm{Log}((-1)\cdot(-1)) = \mathrm{Log}(1) = 0.$$

Kommentar för den som är intresserad: Vi har $\mathrm{Log}(x) = \ln(x)$ när x är reellt och positivt, men $\mathrm{Log}(z)$ är även definierat för alla andra komplexa tal z (utom 0 som inte ligger i värdemängden till f). Precis som att $\arcsin$ är inversen till en *begränsad* sinusfunktion, så är Log inversen till den begränsade komplexa exponentialfunktionen. Funktionen Log kallas *principalgrenen* för den komplexa logaritmfunktionen, den ger alltid värden vars imaginärdel ligger på intervallet $]-\pi, \pi]$. Räkneregeln i (b) gäller för många val av z och w, exempelvis när bägge har positiv realdel. Problemet är att summan av två argument på intervallet $]-\pi, \pi]$ kan hamna utanför detta intervall, så räkneregeln gäller ej i allmänhet som exemplet ovan visar. Denna typ av funktioner studeras i närmare detalj i kurser i komplex analys.