Lösningsförslag

Dugga 2 på Grunk 91MA13/92MA13 den 2025-01-10 kl 08.00-13.00

---

1. (a) Vi har $x = -1 + \sqrt{x+7} \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{x+7} \Rightarrow (x+1)^2 = x + 7$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x + 7 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{24}{4} = 0$ $\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) = 0$. Kontroll visar att endast $x = 2$ uppfyller den ursprungliga ekvationen.

   (b) Vi flyttar över alla termer till ena sidan, gör liknämningt, och faktoriserar: $\frac{x+2}{x} \leq \frac{x+3}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x+2}{x} - \frac{x+3}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)-x(x+3)}{x(x-1)} \leq 0$ $\Leftrightarrow \frac{-2x-2}{x(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x(x-1)} \geq 0$.
   Vi sätter $f(x) = \frac{x+1}{x(x-1)}$ och gör en teckentabell.

		-1		0		1	
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	≀	-	≀	+

   Från tabellen ser vi att $f(x) \geq 0$ när $-1 \leq x < 0$ eller när $x > 1$.

   Svar: a) $x = 2$ b) $-1 \leq x < 0$ eller $x > 1$

2. (a) Båda sidor är positiva så vi har $5e^x = 3^{x+2} \Leftrightarrow \ln(5 \cdot e^x) = \ln(3^{x+2}) \Leftrightarrow \ln(5) + x = (x+2)\ln(3) \Leftrightarrow x\big(\ln(3) - 1\big) = \ln(5) - 2\ln(3) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(5)-2\ln(3)}{\ln(3)-1}$.

   (b) Vi ser att för $x > 1$ är alla logaritm-funktioner definierade, och vi kan exponentiera bägge led. För $x > 1$ har vi alltså: $\ln(x+5) + \ln(x-1) = \ln(3x+1) \Leftrightarrow (x+5)(x-1) = 3x+1 \Leftrightarrow x^2+4x-5 = 3x+1 \Leftrightarrow x^2+x-6 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0$ där vi kunde återanvända kvadratkompletteringen från uppgift 1. Eftersom $x > 1$ får vi att endast $x = 2$ löser ekvationen.

   (c) $e^{-x}+4 = e^x \Leftrightarrow 1+4e^x = e^{2x} \Leftrightarrow e^{2x}-4e^x-1 = 0$. Vi sätter $y = e^x$ och utvecklar vänsterledet: $e^{2x} - 4e^x - 1 = y^2 - 4y - 1 = (y-2)^2 - 5 = (y-2)^2 - \sqrt{5}^2 = (y - 2 + \sqrt{5})(y - 2 - \sqrt{5})$ så $y = 2 \pm \sqrt{5}$. Vi går tillbaka till ursprungliga variabeln x. Ekvationen $e^x = 2 - \sqrt{5}$ saknar lösning eftersom högerledet är negativt, medans $e^x = 2 + \sqrt{5}$ har lösningen $x = \ln(2 + \sqrt{5})$.

   Svar: a) $x = \frac{\ln(5)-2\ln(3)}{\ln(3)-1}$ b) $x = 2$ c) $x = \ln(2+\sqrt{5})$

3. (a) $\arcsin(\sin(\frac{20\pi}{7})) = \arcsin(\sin(\frac{20\pi}{7} - 2\pi)) = \arcsin(\sin(\frac{6\pi}{7})) = \arcsin(\sin(\pi - \frac{6\pi}{7})) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{7})) = \frac{\pi}{7}$ eftersom $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{7} \leq \frac{\pi}{2}$.

   (b) Vi skriver om vänsterledet med hjälpvinkelmetoden: Ansatsen $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = C\sin(x+v) = C\cos(x)\sin(v) + C\sin(x)\cos(v)$ ger med standardmetoden $C = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$ vilket ger ekvationerna $\cos(v) = \frac{1}{2}$ och $\sin(v) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Så vi kan ta $v = \frac{\pi}{3}$. Ursprungsekvationen kan alltså skrivas $2\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ vilket har lösningarna $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ respektive $x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$ där $n \in \mathbb{Z}$. Förenkling ger $x = -\frac{\pi}{12} + 2n\pi$ respektive $x = \frac{5\pi}{12} + 2n\pi$.

   Svar: a)$\frac{\pi}{7}$ b) $x = -\frac{\pi}{12} + 2n\pi$ respektive $x = \frac{5\pi}{12} + 2n\pi$ där $n \in \mathbb{Z}$.

4. (a) Formeln för aritmetisk summa ger direkt

$$10+13+16+19+\cdots+97+100 = \sum_{k=0}^{30} 3k+10 = 31\frac{(100+10)}{2} = 31 \cdot 55 = 1705.$$

(b) Med Eulers formler och binomialsatsen får vi

$$\cos^{12}(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{12} = \frac{1}{2^{12}}\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(e^{ix})^k(e^{-ix})^{12-k}.$$

Här ger $k=9$ respektive $k=3$ termerna $\binom{12}{9}\frac{e^{6ix}}{2^{12}}$ respektive $\binom{12}{3}\frac{e^{-6ix}}{2^{12}}$, och summan av dessa blir $\frac{\binom{12}{3}}{2^{12}}(e^{6ix}+e^{-6ix}) = \frac{\binom{12}{3}}{2^{11}}\cdot\frac{e^{6ix}+e^{-6ix}}{2} = \frac{\binom{12}{3}}{2^{11}}\cos(6x)$, så den sökta koefficienten är $\frac{\binom{12}{3}}{2^{11}} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{6\cdot 2^{11}} = \frac{11\cdot 5}{2^9} = \frac{55}{512}$.

Svar: a)1705 b) $\frac{55}{512}$.

5. För att $f(x)$ ska vara definierad måste $\frac{x+1}{x-3} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+1-(x-3)}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow x > 3$ så $D_f =]3,\infty[$. För $x \in D_f$ och $y \in V_f$ gäller nu att $y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{\ln(\frac{x+1}{x-3})} \Leftrightarrow y^2 = \ln(\frac{x+1}{x-3})) \Leftrightarrow e^{y^2} = \frac{x+1}{x-3} \Leftrightarrow xe^{y^2} - 3e^{y^2} = x+1 \Leftrightarrow x(e^{y^2}-1) = 1+3e^{y^2} \Leftrightarrow x = \frac{1+3e^{y^2}}{e^{y^2}-1}$, vilket visar att ett uttryck för f^{-1} ges av $f^{-1}(y) = \frac{3e^{y^2}+1}{e^{y^2}-1}$.
Svar: $D_f =]3,\infty[$ och $f^{-1}(y) = \frac{3e^{y^2}+1}{e^{y^2}-1}$.

6. Vi har $p(-i) = (-i)^3 - (4-i)(-i)^2 + 7(-i) - 4 + 7i = i + (4-i) - 7i - 4 + 7i = 0$ så enligt faktorsatsen är $p(z)$ delbart med $z+i$. Polynomdivision (ej utskriven här) ger $p(z) = z^3-(4-i)z^2+7z-4+7i = (z+i)(z^2-4z+7+4i)$, så det återstår att hitta nollställena till den andra faktorn. Vi har $z^2-4z+7+4i = 0 \Leftrightarrow (z-2)^2 = -3-4i$. Vi ansätter $z-2 = a+bi$ och får standardekvationerna för realdel, imaginärdel, och absolutbelopp av bägge sidor av föregående likhet:

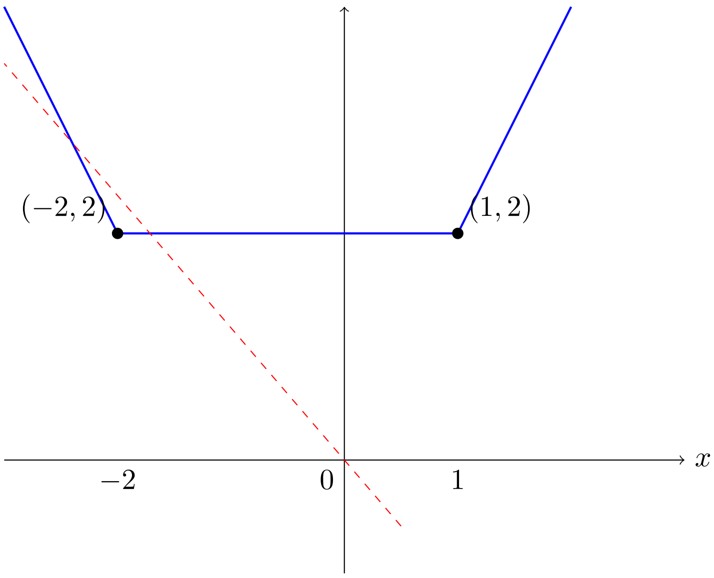
$$\begin{cases} a^2-b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases}$$

Översta och nedersta ekvationen ger $2a^2 = 2$ så $a = \pm 1$. Mellersta ekvationen ger $a = 1 \Rightarrow b = -2$ och $a = -1 \Rightarrow b = 2$. Så vi får två lösningar: $z-2 = 1-2i \Leftrightarrow z = 3-2i$ respektive $z-2 = -1+2i \Leftrightarrow z = 1+2i$.
Svar: Polynomets tre nollställen är $z=-i$, $z = 3-2i$, $z = 1+2i$.

7. Enligt definitionen för absolutbelopp har vi

$$g(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{för } x \leq -2 \\ 2 & \text{för } -2 \leq x \leq 1 \\ 2x & \text{för } x \geq 1. \end{cases}$$

Man kan nu fortsätta med att undersöka de tre fallen separat, men lättare blir det att göra en grafisk lösning. Vi skissar grafen för $g(x)$ i blått:



Antalet lösningar till $g(x) = cx$ är antalet skärningspunkter mellan grafen för $g(x)$ och en linje genom origo med riktningskoefficient c (exemplet $c = -\frac{7}{6}$ visas i figuren ovan) . Med hjälp av grafen ovan får vi direkt att:

$$\textbf{Svar: } \text{Antal lösningar till ekvationen} = \begin{cases} 1 & \text{när } c \leq -2 \\ 2 & \text{när } -2 < c < -1 \\ 1 & \text{när } c = -1 \\ 0 & \text{när } -1 < c < 2 \\ \infty & \text{när } c = 2 \\ 1 & \text{när } c > 2. \end{cases}$$