Lösningsförslag matematisk grundkurs 2022-08-16

1. (a) Beloppen definieras enligt

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 1/2, \\ 1-2x, & x \leq 1/2, \end{cases} \qquad \text{och} \qquad |2-x| = \begin{cases} 2-x, & x \leq 2, \\ x-2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Intressanta punkter för beloppen som ingår i ekvationen är $x = 1/2$ och $x = 2$. Vi delar upp i tre olika fall.
Fall 1: $x \leq 1/2$. Då är

$$|2x-1|+|2-x| = 4-x \quad \Leftrightarrow \quad 1-2x+2-x = 4-x \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2},$$

vilket uppfyller att $x \leq 1/2$. Detta är alltså en lösning.
Fall 2: $1/2 \leq x \leq 2$. Då är

$$|2x-1|+|2-x| = 4-x \quad \Leftrightarrow \quad 2x-1+2-x = 4-x \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2},$$

vilket uppfyller att $1/2 \leq x \leq 2$. Detta är alltså en lösning.
Fall 3: $x \geq 2$. Då är

$$|2x-1|+|2-x| = 4-x \quad \Leftrightarrow \quad 2x-1+x-2 = 4-x \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = 7/4,$$

vilket *inte* ligger i rätt intervall, så $x = 7/4$ är en ingen lösning i detta fall.

(b) Summan är aritmetisk med första term 6 och sista term 994. Vi summerar vart fjärde heltal, så summan har (till exempel) formen $\sum_{k=1}^{n}(2+4k)$. Vi finner antalet termer n genom att betrakta sista termen:

$$994 = 2 + 4n \quad \Leftrightarrow \quad n = 248.$$

Summan kan därmed beräknas enligt känd formel:

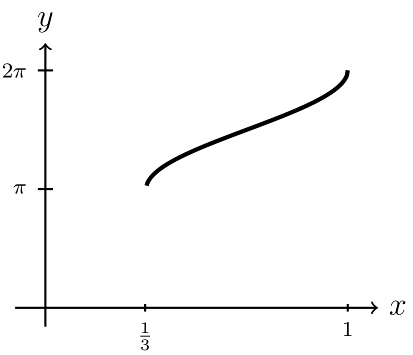
$$\sum_{k=1}^{248}(2+4k) = \frac{6+994}{2} \cdot 248 = 1000 \cdot 124 = 124000.$$

Svar: (a) $x = -\dfrac{1}{2}$ eller $x = \dfrac{3}{2}$ (b) 124000.

2. **Svar**:

(a) $x = \dfrac{\pi}{5} + n2\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = -\dfrac{\pi}{25} - \dfrac{2n\pi}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$

(b)



(c) $\dfrac{2\pi}{5}$.

3. (a) För att samtliga logaritmer ska vara definierade så måste vi ha $x \neq 0$ och $x+3>0$, så vi antar att $x>-3$ och $x \neq 0$. Då gäller att

$$\begin{aligned} \ln x^2 - 2\ln(x+3) = 2\ln 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln x^2 = \ln 4 + \ln(x+3)^2 = \ln(4(x+3)^2) \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = 4(x+3)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 24x + 36 = 0, \end{aligned}$$

eftersom ln är injektiv. Vi ser här att

$$3x^2 + 24x + 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + 8x + 12 = (x+4)^2 - 4 = (x+2)(x+6),$$

så $x=-2$ eller $x=-6$. Av dessa möjligheter är det endast $x=-2$ som är en lösning.

(b) Då ln är injektiv följer det att

$$\ln(1-e^{2x}) = -7 \quad \Leftrightarrow \quad 1-e^{2x} = e^{-7} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} = 1-e^{-7} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \ln(1-e^{-7}).$$

Notera här att $1-e^{-7}>0$ så $x = \dfrac{1}{2}\ln(1-e^{-7})$ är definierad.

Svar: (a) $x=-2$ (b) $x = \dfrac{1}{2}\ln(1-e^{-7})$.

4. En Euler-omskrivning visar att

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 4x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i4x}-e^{-i4x}}{2i}\right) \\ &= -\frac{1}{8i}\left(e^{i3x}-e^{-ix}-e^{ix}+e^{-i3x}\right)\left(e^{i4x}-e^{-i4x}\right) \\ &= -\frac{1}{8i}\left(e^{i7x}-e^{-ix}-e^{i3x}+e^{-i5x}-e^{i5x}+e^{-i3x}+e^{ix}-e^{-i7x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(-\sin 7x + \sin 3x - \sin x + \sin 5x\right), \end{aligned}$$

så ekvationen kan ekvivalent skrivas om enligt

$$\begin{aligned} 4\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 4x = \sin 3x - \sin 7x \quad &\Leftrightarrow \quad \sin x = \sin 5x \\ &\Leftrightarrow \quad 5x = x + 2\pi n \quad \text{eller} \quad 5x = \pi - x + 2\pi n, \end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$. Alltså kommer lösningarna ges av

$$x = \frac{\pi n}{2} \quad \text{eller} \quad 6x = \pi + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}.$$

Svar: $x = \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. (a) Då funktionen $x \mapsto 2^x$ är injektiv följer det att

$$\begin{aligned} 4^x \cdot 2^{x^2} = 8^{x^3} \quad &\Leftrightarrow \quad (2^2)^x \cdot 2^{x^2} = (2^3)^{x^3} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2x} \cdot 2^{x^2} = 2^{3x^3} \\ &\Leftrightarrow \quad 2^{2x+x^2} = 2^{3x^3} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + x^2 = 3x^3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^3 - x^2 - 2x = 0, \end{aligned}$$

så $x=0$ eller

$$3x^2 - x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{36},$$

vilket är uppfyllt för $x = 1$ eller $x = -2/3$.
Alternativt kan man logaritmera både sidorna i ekvationen:

$$\begin{aligned} 4^x \cdot 2^{x^2} = 8^{x^3} \quad &\Leftrightarrow \quad x \ln 4 + x^2 \ln 2 = x^3 \ln 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \ln 2 + x^2 \ln 2 = 3x^3 \ln 2 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x^3 - x^2 - 2x = 0, \end{aligned}$$

vilket vi sedan löser på samma sätt som ovan.

(b) Enligt definitionen av e^{ix} för $x \in \mathbf{R}$ så gäller att

$$\begin{aligned} e^{ix}e^{iy} &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y) \\ &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) = e^{i(x+y)}, \end{aligned}$$

vilket skulle visas. Vi använde additionsformlerna för cos och sin i näst sista likheten.

Svar: (a) $x = 0$, $x = 1$, eller $x = -2/3$ (b) se ovan.

6. Definitionsmängden för $\arcsin x$ är $[-1, 1]$, så vi måste först kräva att $-1 \leq x \leq 1$. Vidare gäller att definitionsmängden för $\ln t$ ges av $t > 0$, så

$$t = \arcsin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \leq 1.$$

Dessutom måste vi undvika nolldivisioner, så vi observerar att

$$1 + \ln(\arcsin x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\arcsin x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin x = e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin e^{-1},$$

så $x \neq \sin e^{-1}$ är nödvändigt. Med andra ord blir

$$D_f =]0,1] \setminus \{ \sin e^{-1} \} = \left\{ x \in \mathbf{R} : 0 < x \leq 1 \text{ och } x \neq \sin e^{-1} \right\}.$$

Om $x \in D_f$ så gäller att

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{1 - \ln(\arcsin x)}{1 + \ln(\arcsin x)} \quad \Leftrightarrow \quad (1 + \ln(\arcsin x))y = 1 - \ln(\arcsin x) \\ &\Leftrightarrow \quad (y+1)\ln(\arcsin x) = 1 - y \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\arcsin x) = \frac{1-y}{1+y} \\ &\Leftrightarrow \quad \arcsin x = \exp\left(\frac{1-y}{1+y}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \sin\left(\exp\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\right). \end{aligned}$$

Notera särskilt implikationen ovan! Vill vi skriva ekvivalens måste vi lägga till villkor. Men eftersom vi finner högst en lösning för varje y, så innebär detta att f är injektiv samt att ett uttryck för inversen därmed ges av $f^{-1}(y) = \sin\left(\exp\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\right)$.

Svar: (a) $D_f =]0,1] \setminus \{ \sin e^{-1} \}$; $f^{-1}(y) = \sin\left(\exp\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\right)$.

7. Eftersom z_0, z_1, z_2 är nollställen till polynomet $p(z)$ så gäller det att

$$\begin{aligned} p(z) = z^3 + az^2 + bz + c &= (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) \\ &= \left(z^2 - (z_0 + z_1)z + z_0 z_1\right)(z - z_2) \\ &= z^3 - (z_0 + z_1 + z_2)z^2 + (z_0 z_1 + z_0 z_2 + z_1 z_2)z - z_0 z_1 z_2, \end{aligned}$$

ur vilket det följer att

$$a = -(z_0 + z_1 + z_2), \quad b = z_0 z_1 + z_0 z_2 + z_1 z_2, \quad \text{samt} \quad c = -z_0 z_1 z_2.$$

Då vi söker ett polynom $q(z)$ med nollställena $z_0 z_1$, $z_0 z_2$ och $z_1 z_2$, så ges ett sådant polynom (till exempel) på formen

$$\begin{aligned} q(z) &= (z - z_0 z_1)(z - z_0 z_2)(z - z_1 z_2) \\ &= \big(z^2 - (z_0 z_1 + z_0 z_2)z + z_0^2 z_1 z_2\big)(z - z_1 z_2) \\ &= z^3 - (z_0 z_1 + z_0 z_2 + z_1 z_2)z^2 + z_0 z_1 z_2 (z_0 + z_1 + z_2)z - z_0^2 z_1^2 z_2^2 \\ &= z^3 - bz^2 + (-c)(-a)z - c^2 = z^3 - b\,z^2 + ac\,z - c^2. \end{aligned}$$

Notera att svaret inte är entydigt. Vi kan multiplicera polynomet $q(z)$ ovan med vilket tal $a \neq 0$ som helst utan att förändra vilka nollställen vi har.

Svar: Till exempel $q(z) = z^3 - b\,z^2 + ac\,z - c^2$.