Lösningsförslag - 91MA13/92MA13 STN3 - 2024-08-20

1. (a) $z = (2e^{\frac{i\pi}{6}})^5$, så absolutbeloppet är $|z| = 2^5 = 32$ och ett argument är $\frac{5\pi}{6}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^k = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})^{10} - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{2^5}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{31}{32(\sqrt{2} - 1)} = \frac{31(\sqrt{2} + 1)}{32}$.

   (c) Enligt binomialsatsen: $(2x - 1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}(2x)^k(-1)^{10-k}$, så x^7-termen motsvarar $k = 7$. Den sökta koefficienten blir därför $2^7 \cdot (-1)^3 = -128$.

   Svar: (a) absolutbelopp 32, argument $\frac{5\pi}{6}$ (b) $\frac{31(\sqrt{2}+1)}{32}$ (c) -128

2. (a) Vi exponentierar båda sidor och får den implicerade ekvationen

   $$x(x+3) = 2(3x+2) \Leftrightarrow x^2-3x-4 = 0 \Leftrightarrow (x-\tfrac{3}{2})^2-(\tfrac{5}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4) = 0.$$

   Så $x = -1$ eller $x = 4$, men endast $x = 4$ löser den ursprungliga ekvationen eftersom logaritmer endast är definierade för positiva tal.

   (b) Med $y = e^x$ får vi ekvationen $y^3 = 3y^2 + 10y \Leftrightarrow y(y^2 - 3y - 10) = 0$. Vi faktoriserar vänsterledets andra faktor med kvadratkomplettering:

   $$y^2 - 3y - 10 = (y - \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{9}{4} - 10 = (y - \tfrac{3}{2})^2 - (\tfrac{7}{2})^2 = (y - 5)(y + 2),$$

   så vår ekvation kan skrivas $y(y-5)(y+2) = 0$, och $y \in \{-2, 0, 5\}$. För att hitta motsvarande x-värden betraktar vi ekvationerna $e^x = -2$, $e^x = 0$, och $e^x = 5$. Endast den sista är lösbar med $x = \ln(5)$.

   Svar: (a) $x = 4$ (b) $x = \ln(5)$

3. (a) Vi vet att $\arcsin(\sin(x)) = x$ om och endast om $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Med räknereglerna $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ och $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$ får vi:

   $$\begin{aligned}\arcsin(\cos(\tfrac{11\pi}{5})) &= \arcsin(\sin(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{11\pi}{5})) \\ &= \arcsin(\sin(-\tfrac{17\pi}{10})) = \arcsin(\sin(\tfrac{3\pi}{10})) = \tfrac{3\pi}{10}.\end{aligned}$$

   (b) Vi har

   $$\sin(2x) = \cos(x) \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) = \cos(x) \Leftrightarrow 2\cos(x)\big(\sin(x) - \tfrac{1}{2}\big) = 0.$$

   Ekvationen löses alltså då $\cos(x) = 0$ eller när $\sin(x) = \frac{1}{2}$, det första fallet ger $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ och det andra fallet ger $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, där $k \in \mathbb{Z}$.

   Svar: (a) $\frac{3\pi}{10}$ (b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, eller $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, eller $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, där $k \in \mathbb{Z}$.

4. $\arccos(x)$ är definierad när $x \in [-1, 1]$, eftersom exponentialfunktionen endast antar positiva värden blir villkoret för att $x \in D_f$ att $e^{\frac{x}{x+1}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 0]$. För att hitta ett uttryck för inversen sätter vi $y = f(x)$ och löser ut x som funktion av y. För $x \in]-1, 0]$ har vi

   $$y = f(x) \Leftrightarrow y = \arccos(e^{\frac{x}{x+1}}) \Rightarrow \cos(y) = e^{\frac{x}{x+1}} \Rightarrow \ln(\cos(y)) = \frac{x}{x+1}$$

   $$\Rightarrow \ln(\cos(y)) = 1 - \frac{1}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{x+1} = 1 - \ln(\cos(y)) \Rightarrow x + 1 = \frac{1}{1 - \ln(\cos(y))}$$

   $$\Rightarrow x = \frac{1}{1 - \ln(\cos(y))} - 1 = \frac{\ln(\cos(y))}{1 - \ln(\cos(y))}.$$

   Vi kan därför dra slutsatsen att:
   Svar: $D_f =]-1, 0]$ och $f^{-1}(y) = \frac{\ln(\cos(y))}{1-\ln(\cos(y))}$ är ett uttryck för inversen till f.

5. Vi ser direkt att $z = 0$ är ett nollställe. Vi divierarar med z och använder standardmetoden för att hitta nollställena till $q(z) = z^2 - 2z + 1 + 2i = (z-1)^2 + 2i$. Vi inför $z - 1 = x + iy$ och får ekvationen $(x + iy)^2 = -2i$. Vi jämför realdel, imaginärdel och absolutbelopp av bägge sidor och får ekvationerna

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Första och tredje ekvationen ger $x^2 = \pm 1$. När $x = 1$ ger andra ekvationen $y = -1$ och när $x = -1$ ger andra ekvationen $y = 1$. Eftersom $z = 1 + x + iy$ får vi två lösningar: $z = 2 - i$ och $z = i$.
Svar: $p(z)$ har tre nollställen: $z = 0$, $z = 2 - i$, och $z = i$.

Svar: $\frac{1}{2}\sin(2x)$

6. Enligt Eulers formler har vi $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ och $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Detta ger

$$\sin(3x)\cos(2x) - \sin(x)\cos(4x) = \frac{1}{4i}\Big((e^{3ix} - e^{-3ix})(e^{2ix} + e^{-2ix}) - (e^{ix} - e^{-ix})(e^{4ix} + e^{-4ix})\Big)$$

$$= \frac{1}{4i}\Big((e^{ix} - e^{-ix}) + (e^{3ix} - e^{-3ix})\Big) = \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(3x).$$

Svar: $\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(3x)$

7. Låt $f(x) = \sum_{k=1}^{20} |x - k|$. Då består grafen för f av sammanhängande linjesegment vars riktningskoefficienter är $-20, -18, -16, \ldots 16, 18, 20$ på de olika intervallen $[k, k+1]$. Så lutningen på grafen går från negativ till positiv, och funktionen antar sitt minsta värde när $10 \le x \le 11$, där grafen är en horisontell linje. På detta intervall har vi enligt definitionen av absolutbelopp

$$f(x) = \sum_{k=1}^{10}(x-k) - \sum_{k=11}^{20}(x-k) = -\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=11}^{20} k = \sum_{k=1}^{10}(10+k) - k = \sum_{k=1}^{10} 10 = 100.$$

Vi drar slutsatsen att:
Svar: För $c < 100$ saknas lösning, för $c = 100$ finns oändligt många lösningar, och för $c > 100$ finns exakt två lösningar.