LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jesper Thorén

Lösningsförslag till Tentamen Envariabelanalys 1, 91MA21, 120502.

1. (a) Vi förlänger och utnyttjar kända standardgränsvärden.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0}\ 2\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{2x}{\ln(1+2x)} = 2.$$

(b) Vi faktoriserar, sätter $x = 1+t$ och låter $t\to 0$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2)}{\ln x} = \lim_{t\to 0}\frac{t((1+t)^2+2)}{\ln(1+t)} = 3.$$

(c) Vi bryter ut den dominerande termen i täljare och nämnare.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(3^x+x^7+\ln 9^x)^2}{\sqrt{x^{100}+4x^2 81^x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x9^x(1+\frac{x^7}{3^x}+\frac{x\ln 9}{3^x})^2}{x9^x\sqrt{\frac{x^{98}}{81^x}+4}} = \frac{1}{2}.$$

2. (a) Vi sätter $t=\sqrt{x}$, dvs $t^2 = x$ så att $2tdt = dx$ och integrerar partiellt.

$$\int \arctan\sqrt{x}\ dx = \int 2t\cdot\arctan t\ dt = t^2\arctan t - \int t^2\cdot\frac{1}{1+t^2}\ dt$$

$$= t^2\arctan t - \int (1-\frac{1}{1+t^2})\ dt = t^2\arctan t - t + \arctan t + C =$$

$$= x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + C.$$

(b) Här integrerar vi partiellt.

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+2x}}\ dx = x\sqrt{1+2x} - \int\sqrt{1+2x}\ dx = x\sqrt{1+2x} - \frac{1}{3}(1+2x)^{3/2} + C.$$

(c) En partialbråksuppdelning ger en enklare form.

$$\int\frac{1+x}{x(1+x^2)}\ dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{x-1}{1+x^2}\right)\ dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \arctan x + C.$$

3. Riktningskoefficienten, k för en eventuell asymptot, $y = kx+m$ ges av

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+x^3+1-x^4}{x^2(\sqrt{4x^4+x^3+1}+x^2)} = 1,$$

där vi förlängt med täljarens konjugatuttryck och brutit ut dominerande termer för att beräkna gränsvärdet. Konstanten m ges nu av

$$\lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\infty}(y-x) = \frac{x^3+1}{x(\sqrt{4x^4+x^3+1}+2x^2)} = \frac{1}{4},$$

där vi gjort liknämnigt innan vi beräknat gränsvärdet. Så asymptoten är $y = x + 1/4$.

4. Funktionen är definierad på hela reella axeln och går mot 0 då $x \to \pm\infty$. Så $y = 0$ är en vågrät asymptot då $x \to \pm\infty$. Vi får efter faktorisering att

$$f'(x) = -6x(x-1)(x+\frac{1}{3})e^{-3x^2+4x},$$

och en teckentabell visar att funktionen har lokalt maximum i $(1, e)$, och i $(-1/3, e^{-5/3}/9)$, samt ett lokalt minimum i$(0,0)$. Lodräta asymptoter saknas.

5. Vi partialbråksuppdelar och får att

$$\int_0^{\infty} \frac{5x+4}{(2x+1)(x+1)(x+2)}\,dx = \int \left(\frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{-2}{x+2}\right)\,dx =$$

$$[\ln|2x+1| + \ln|x+1| - 2\ln|x+2|]_0^{\infty} = \left[\ln\left|\frac{2x^2+3x+1}{x^2+4x+4}\right|\right]_0^{\infty} = \ln 2 - \ln\frac{1}{4} = 3\ln 2.$$

6. Sätt

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt - x - \frac{x^3}{3}.$$

Då är $f(0) = 0$, $f'(x) = e^{x^2} - 1 - x^2$, så att även $f'(0) = 0$. Vidare är $f''(x) = 2x(e^{x^2} - 1) > 0$ då $x > 0$, så kurvan är konvex då $x > 0$ och kommer därför aldrig att kunna passera x-axeln (inget lokalt maximum kan finnas) för $x > 0$.

7. I en punkt $(a, 3a^2)$ på den ena kurvan har tangenten ekvationen $y - 3a^2 = 6a(x-a)$, och om en punkt $(b, 4b^3)$ på den andra kurvan ska ha samma tangentlinje, ska punkten uppfylla ekvationen, dvs vi får relationen $4b^3 - 3a^2 = 6a(b-a)$. Dessutom ska derivatan i de båda punkterna vara lika och det ger oss att $6a = 12b^2$, dvs att $a = 2b^2$. Insatt i relationen ger räkningar att $b = 2/3$ och sedan att $a = 8/9$. Tangentlinjen blir $y = \frac{16}{3}x - \frac{64}{27}$.