

Lösningsförslag Tentamen Envariabelanalys 2, 91MA21, 91MA27, 120608.

1. Vi skriver ekvationen på formen $y' - \frac{2}{x} y = \frac{x}{x+1}$, och ser att den integrerande faktorn är $1/x^2$. Vi får relationen $\frac{1}{x^2} \cdot y = \ln x - \ln(x+1) + C$, och begynnelsevärdet $y(1) = 0$ ger sedan att $C = \ln 2$. Lösningen blir $y = x^2 \ln \frac{2x}{x+1}$.

2. Vi använder skivformeln för att först räkna ut volymen som fås då hela området mellan x -axeln och linjen $y = e$ för $0 < x < 1/2$ roteras, och sedan drar vi ifrån volymen som fås då området under kurvan (och över x -axeln) roteras. Vi får alltså

$$\int_0^{1/2} \pi e^2 dx - \int_0^{1/2} \pi (e^{2x})^2 dx = \frac{\pi}{4}(e^2 + 1).$$

3. (a) Eftersom

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^3}},$$

och $\int_2^\infty \frac{1}{x} dx$ är divergent, är den ursprungliga integralen divergent.

- (b) Sätter vi $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$, blir $f'(x) < 0$ för tillräckligt stora x , vilket medför att beloppet av termerna är avtagande. Eftersom desamma klart går mot noll är den alternerande serien konvergent enligt Leibniz kriterium.

- (c) Med $a_k = \frac{2^k}{\sqrt{k!}}$, gäller att $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2}{\sqrt{k+1}} \rightarrow 0 < 1$ då $k \rightarrow \infty$, så serien är konvergent enligt kvotkriteriet.

4. Differentialekvationen $y'' - 2y' - 3y = xe^x$ har karakteristisk ekvation $r^2 - 2r - 3 = 0$, med rötter -1 och 3 . Så den homogena lösningen blir $y_H = Ae^{-x} + Be^{3x}$. För en partikulärlösning antar vi $y = ze^x$ för någon funktion $z = z(x)$, så att differentialekvationen övergår till $z'' - 4z = x$, med partikulärlösning $z_P = -x/4$. Så $y_P = z_P e^x = -\frac{xe^x}{4}$. Allmänna lösningen blir $y = y_H + y_P = Ae^{-x} + Be^{3x} - \frac{xe^x}{4}$, och begynnelsevärdena ger sedan att $A = 11/16$ och $B = 5/16$. Den sökta lösningen blir således

$$y = \frac{11}{16} e^{-x} + \frac{5}{16} e^{3x} - \frac{xe^x}{4}.$$

5. Efter att vi gjort liknämngt använder vi standard ML-utvecklingarna och får att

$$\begin{aligned} & \frac{\left(ax + \frac{a^2 x^2}{2}\right) \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + x^2 \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) + \mathcal{O}(x^4)}{x^3 + \mathcal{O}(x^4)} \\ &= \frac{ax^2 - \frac{ax^3}{2} + \frac{a^2 x^3}{2} + x^2 - \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^4)}{x^3 + \mathcal{O}(x^4)}. \end{aligned}$$

Vi får ett ändligt gränsvärde endast då $a = -1$ och för detta värde blir gränsvärdet $1/2$.

6. Vi observerar att $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$, så vi löser differentialekvationen $y'' + 4y = 1 + \cos 2x$. Karakteristiska ekvationen har de komplexa rötterna $r = \pm 2i$, så den homogena lösningen blir $y_H = A \cos 2x + B \sin 2x$. En partikulärlösning till $y'' + 4y = 1$ är $y = 1/4$ och en partikulärlösning till $y'' + 4y = \cos 2x$ fås genom att vi söker realdelen av lösningen till $u'' + 4u = e^{2xi}$. Ansatsen $u = ze^{2xi}$, ger efter räkningar att $y_p = \operatorname{Re}(u_P) = \frac{x}{4} \sin 2x$. Så den allmänna lösningen till differentialekvationen blir

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{4}.$$

7. Med $a_k = 1 - k \sin \frac{1}{k} = \frac{1}{6k^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^3})$ ger kvotkriteriet att konvergensraden $R = 1$. Eftersom $|a_k| \leq \frac{1}{6k^2} \cdot \left| 1 + \mathcal{O}(\frac{1}{k}) \right|$, är serien absolutkonvergent och konvergerar alltså både då $x = 1$ och $x = -1$. Så serien är konvergent för $-1 \leq x \leq 1$.