

Lösningsförslag till Tentamen Envariabelanalys 1, 91MA21/91MA27, 120815.

1. (a) Vi förlänger och utnyttjar kända standardgränsvärden.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}.$$

- (b) Vi använder här logaritmlagarna.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2(1 + 1/x))}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x + \ln(1 + 1/x)}{\ln x} = 2.$$

- (c) Vi bryter ut e^x i täljaren och får ett standardgränsvärde efter att ha förlängt med 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

2. (a) Vi sätter $t = \sqrt{x}$, dvs $t^2 = x$ så att $2t dt = dx$ och integrerar partiellt. I den nya integralen måste en polynomdivision göras.

$$\begin{aligned} \int \ln(1 + \sqrt{x}) \, dx &= \int 2t \ln(1 + t) \, dt = t^2 \ln(1 + t) - \int \frac{t^2}{1 + t} \, dt \\ &= t^2 \ln(1 + t) - \int t - 1 + \frac{1}{1 + t} \, dt = x \ln(1 + \sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x}) + C \end{aligned}$$

- (b) Vi ser att täljaren är derivatan av nämnaren, så vi får att

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x} \, dx = \ln |x^2 + x| + C.$$

- (c) Vi använder en känd trigonometrisk formel och integrerar sedan partiellt.

$$\begin{aligned} \int x \sin^2 x \, dx &= \int \frac{x}{2} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} + \int \frac{\sin 2x}{4} \, dx \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C. \end{aligned}$$

3. Funktionen är ej definierad i 0 och 1 så därför måste gränsvärdena kollas i dessa punkter. Eftersom $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$, har kurvan en vågrät asymptot $y = 1$ då $x \rightarrow \pm\infty$. Vi ser också att $y \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0^-$, men $y \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 0^+$. Dessutom $y \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 1^-$, och $y \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 1^+$, vilket betyder att $x = 0$ och $x = 1$ är lodräta asymptoter.
4. Funktionen är definierad för alla x och man kollar att den inte har någon asymptot då $x \rightarrow \pm\infty$. För övrigt är $y(0) = 0$ och $y \rightarrow \pm\infty$ då $x \rightarrow \pm\infty$, respektive. Derivatan av funktionen beräknas, förenklas och faktoriseras så att man får

$$y' = \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{x(x-1)(x^2 - x + 2)}{(1 + x^2)^2},$$

vilken är noll endast då $x = 0$ eller 1. En teckentabell (övriga faktorer är alltid positiva), visar att kurvan y har lokalt maximum i $(0, 0)$ och lokalt minimum i $(1, 1/2 - \ln 2)$.

5. Vi partialbråksuppdelar och får att

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1+x}{x(1+x^2)} dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan x \right]_0^1 = \infty.\end{aligned}$$

6. Sätt $f(x) = 3x^2 - 4x - 2 \ln |x|$. Då är f definierad överallt utom i 0 där den har en asymptot ($f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0^\pm$). Vi ritar kurvan till f och ser efter när den ej skär linjen $y = a$ och bestämmer a efter det. Deriverar man funktionen och hittar derivatans nollställen kan man efter teckentabell rita kurvan. Man får att

$$f'(x) = 6x - 4 - \frac{2}{x} = \frac{6x^2 - 4x - 2}{x},$$

med nollställen 1 och $-1/3$, vilka båda ger ett lokalt minimum för f . Eftersom $f(1) = -1$ och $f(-1/3) > 0$, är $(1, -1)$ kurvans lägsta punkt. Således har ekvationen $f(x) = a$ ingen lösning då $a < -1$.

7. (a) Vi sätter in i differenskvoten och beräknar gränsvärdet för att få derivatan.

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1+(x+h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{h} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+(x+h)^2}}{h\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(x+h)^2}} \\ &= \frac{1+x^2 - (1+(x+h)^2)}{h\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(x+h)^2}(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x+h)^2})} \\ &= \frac{-2xh - h^2}{h\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(x+h)^2}(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x+h)^2})} \rightarrow \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}},\end{aligned}$$

då $h \rightarrow 0$.

- (b) Vi har att $f'(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4 \geq 1 > 0$ för alla x så f är strängt växande och har en invers. Man ser att då $x = 1$ är $y = f(x) = f(1) = 4$ så att

$$Df^{-1}(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1+3+5} = \frac{1}{9}.$$