

Lösningsförslag Tentamen Envariabelanalys 2, 91MA21, 91MA27, 120825.

1. Vi skriver differentialekvationen på formen $y' + \frac{2x}{1-x^2} y = \frac{x}{1-x^2}$, och ser att den integrerande faktorn är $1/(1-x^2)$. Vi får sedan efter integrering relationen $\frac{1}{1-x^2} \cdot y = \frac{1}{2(1-x^2)} + C$, och begynnelsevärdet $y(0) = 3$ ger sedan att $C = 5/2$. Lösningen blir efter förenkling $y = 3 - \frac{5x^2}{2}$.

2. Enligt skivformeln blir volymen

$$\int_0^3 \pi \frac{16x^2}{x^2+3} dx = 16\pi \int_0^3 \left(1 - \frac{3}{x^2+3}\right) dx = 16\pi(3 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}).$$

3. Differentialekvationen $y'' - 2y' - 3y = 6xe^x$ har karakteristisk ekvation $r^2 - 2r - 3 = 0$, med rötter -1 och 3 . Så den homogena lösningen blir $y_H = Ce^{-x} + De^{3x}$. För en partikulärlösning antar vi $y = (Ax + B)e^x$ och insatt i ekvationen får vi efter räkningar att $A = -3/2$ och $B = 0$. Allmänna lösningen blir då $y = y_H + y_P = Ce^{-x} + De^{3x} - \frac{3x}{2}e^x$, och begynnelsevärdena ger sedan att $C = -5/3$ och $D = 10/3$. Den sökta lösningen blir således

$$y = \frac{1}{8}e^{-x} + \frac{7}{8}e^{3x} - \frac{3x}{2}e^x.$$

4. (a) Vi har att

$$\frac{\sqrt{k^2+k}}{k^2+k+1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{k}}}{1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}},$$

och $\sum 1/k$ är divergent, så serien är divergent.

- (b) Förlänger man uttrycket $\sqrt{k^2+2} - \sqrt{k^2+1}$ med dess konjugatuttryck ser man att det bildar en avtagande följd mot noll. Serien är alltså konvergent enligt Leibniz kriterium.

- (c) Ett variabelbyte $t = x - 1$, ger att vi kan jämföra integralen med $\int_0^1 1/t dt$, och vi får därför att integralen är divergent.

5. Vi gör liknämngt och använder kända Maclaurinutvecklingar.

$$\frac{e^x}{\ln(1+x+x^2)} - \frac{\cos x}{\arctan x} = \frac{e^x \cdot \arctan x - \cos x \cdot \ln(1+x+x^2)}{\ln(1+x+x^2) \cdot \arctan x} = \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(x-\frac{x^3}{3}\right) - \left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(x+x^2-\frac{(x+x^2)^2}{2}\right) + \mathcal{O}(x^3)}{x^2 + \mathcal{O}(x^3)} \rightarrow \frac{1}{2},$$

då $x \rightarrow 0$.

6. För konvergensradien testar vi

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{6^{k+1}+1}{(k+1)^3+1} \cdot \frac{k^3+1}{6^k+1} \cdot |x| \rightarrow 6|x|,$$

då $k \rightarrow \infty$, vilket är < 1 då $|x| < 1/6$. För $x = 1/6$ kan serien jämföras med $\sum 1/k^3$ och är därför konvergent, och för $x = -1/6$ ser vi att beloppet av termerna avtar mot 0, så även då är serien konvergent enligt Leibniz. Därför är serien konvergent endast då $|x| \leq 1/6$.

7. (a) Vi använder standardutvecklingen $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3(1+\xi)^3}$, där ξ är ett tal mellan 0 och t , för att skriva

$$f(x) = \ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3(1+\xi)^3},$$

där $-x^2 < \xi < 0$. Detta ger $p_4(x) = -x^2 - \frac{x^4}{2}$.

- (b) Då $|x| < 1/4$ är $-\frac{1}{4^2} < -x^2 < \xi < 0$ ovan och vi får att

$$|f(x) - p_4(x)| = \frac{|x|^6}{3(1+\xi)^3} < \frac{(1/4)^6}{3(1-1/16)^3} = \frac{16^3}{3 \cdot 4^6 \cdot 15^3} = \frac{1}{3 \cdot 15^3}.$$