

Lösningsförslag Tentamen Envariabelanalys 2, 91MA21, 91MA27, 130107.

1. Vi skriver differentialekvationen på formen $y' - \frac{x}{1+x^2} y = 0$, och ser att den integrerande faktorn är $1/\sqrt{1+x^2}$. Vi får sedan efter integrering relationen $1/\sqrt{1+x^2} \cdot y = C$, och begynnelsevärdet $y(0) = 2$ ger att $C = 2$. Lösningen blir efter förenkling $y = 2\sqrt{1+x^2}$.
2. Enligt skivformeln blir volymen

$$\int_1^2 \pi \frac{1}{(1+x)^2 x} dx = \pi \int_1^2 \left(\frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{-1}{1+x} + \frac{1}{x} \right) dx = \pi(2 \ln 2 - \ln 3 - 1/6).$$

3. Differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = 2xe^{-x}$ har karakteristisk ekvation $r^2 + 3r + 2 = 0$, med rötter -2 och -1 . Så den homogena lösningen blir $y_H = Ce^{-2x} + De^{-x}$. För en partikulärlösning antar vi $y = ze^x$, där z är en funktion av x och insatt i ekvationen får vi efter räkningar att $z = x^2 - 2x$ ger en lösning, dvs att en partikulärlösning är $y_P = (x^2 - 2x)e^{-x}$. Allmänna lösningen blir då $y = y_H + y_P = Ce^{-2x} + De^{-x} + (x^2 - 2x)e^{-x}$, och begynnelsevärdena ger sedan att $C = -5$ och $D = 6$. Den sökta lösningen blir således

$$y = -5e^{-2x} + (x^2 - 2x + 6)e^{-x}.$$

4. (a) Serien är en *konvergent* geometrisk serie eftersom $-1 < -1/3 < 1$.
(b) Termerna går inte mot noll så serien är *divergent*.
(c) Funktionen $f(k) = \frac{\sqrt{k-1}}{k+1}$ avtar mot 0 då $k \rightarrow \infty$, vilket t.ex ses genom att derivera f med avseende på ett reellt k . Enligt Leibniz kriterium är då den alternerande serien *konvergent*.
5. För konvergensradien testar vi

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{4^{k+1} + 1}{(k+1)^4 + 1} \cdot \frac{k^4 + 1}{4^k + 1} \cdot |x| \rightarrow 4|x|,$$

då $k \rightarrow \infty$, vilket är < 1 då $|x| < 1/4$. För $x = 1/4$ kan serien jämföras med $\sum 1/k^4$ och är därför konvergent, och för $x = -1/4$ ser vi att serien är absolutkonvergent (jämför med $\sum 1/k^4$ igen). Därför är serien konvergent endast då $|x| \leq 1/4$.

6. Vi gör liknämning och använder kända Maclaurinutvecklingar.

$$\begin{aligned} \frac{e^{x-x^2}}{1-\cos x} - \frac{2\sqrt{1+ax}}{x^2} &= \frac{x^2 e^{x-x^2} - 2\sqrt{1+ax}(1-\cos x)}{x^2(1-\cos x)} \\ &= \frac{x^2 \left(1 + x - x^2 + \frac{(x-x^2)^2}{2} \right) - 2 \left(1 + \frac{ax}{2} - \frac{a^2 x^2}{8} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right) + \mathcal{O}(x^5)}{\frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^5)} \\ &= \frac{x^3 - \frac{a}{2}x^3 - x^4 + \frac{x^4}{2} + \frac{a^2}{8}x^4 + \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^5)}{\frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^5)} \rightarrow \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

då $x \rightarrow 0$, endast då $a = 2$.

7. För $x = 0$ är olikheten sann och då $x > 0$ använder vi standardutvecklingarna och får (med $t = 2x$),

$$\sqrt{1+2x} = (1+t)^{1/2} = 1+x + \binom{1/2}{2} \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{3/2}} \cdot (2x)^2,$$

för något ξ så att $0 < \xi < 2x$. Detta ger oss att

$$|\sqrt{1+2x} - 1 - x| = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{3/2}} \cdot 4 \cdot x^2 \leq \frac{x^2}{2},$$

eftersom $\xi > 0$.