LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jesper Thorén

Lösningsförslag till Tentamen Envariabelanalys 1, 91MA21/91MA27/92MA21/92MA27, 130601.

1. (a) Vi gör substitutionen $t = 1 + 2x$ och därefter en partiell integration.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \int \frac{t-1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int (t^{1/2} - t^{-1/2})\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(1+2x)^{3/2}}{3} - (1+2x)^{1/2}\right) + C = \frac{\sqrt{1+2x}}{3}(x-1) + C.$$

(b) Vi gör substitutionen $t = \ln x$ och därefter en partiell integration.

$$\int \frac{\ln(\ln x))}{x}\,dx = \int \ln t\,dt = t\ln t - t + C = \ln x(\ln(\ln x) - 1) + C.$$

(c) Efter att ha skrivit om integranden gör vi substitutionen $t = e^x$.

$$\int \frac{2}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{2e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{2}{t^2+1}\,dt = 2\arctan e^x + C.$$

2. (a) Vi bryter ut e^{-2x} i täljaren och förlänger med 4 för att få ett standardgränsvärde.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{x} = \lim_{x\to 0} e^{-2x} \cdot \frac{e^{4x}-1}{4x} \cdot 4 = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4.$$

(b) Vi förlänger med konjugatuttrycket av täljaren och utnyttjar ett känt standardgränsvärde.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-\sin x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+2x-(1-\sin x)}{x(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-\sin x})} = \frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

(c) Vi sätter $t = x^2 - 1$, så att $t \to \infty$ då $x \to \infty$, och utnyttjar ett känt standardgränsvärde.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

3. Ett känt trigonometriskt samband säger att $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$, så inuti absolutbeloppet har vi funktionen $\frac{1}{2}\cos 2x$, som byter tecken vid $x = \pi/4$. Vi delar därför integralen där för att få bort absolutbeloppet.

$$\int_0^{\pi/2} \left|\cos^2 x - \frac{1}{2}\right|\,dx = \int_0^{\pi/2} \left|\frac{1}{2}\cos 2x\right|\,dx$$
$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\cos 2x\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

4. Funktionen $f(x)$ är inte definierad då $x = 0$ eller då $x = 1$, och höger- och vänstergränsvärden i dessa punkter visar att $f(x)$ har lodräta asymptoter där. Derivatan blir efter faktorisering

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-2)}{x(1-x)^2},$$

och en teckentabell visar ett lokalt maximum i $(1/2, -2\ln 2 - 1)$ och ett lokalt minimum i $(2, 2\ln 2 + 2)$. Eftersom $\dfrac{f(x)}{x} \to 0$, men $f(x) \to \infty$ då $x \to \pm\infty$, har funktionen ingen sned asymptot.

5. Vi partialbråksuppdelar för att hitta en primitiv och använder därefter logaritmlagarna för att kunna räkna ut gränsvärdet.

$$\int_1^\infty \frac{1+x}{x(1+x^2)}\,dx = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)\,dx$$

$$= \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \arctan x\right]_1^\infty = \left[\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + \arctan x\right]_1^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \frac{\pi}{2}\right).$$

6. Funktionen $y = f(x)$ är definierad och kontinuerlig på hela intervallet, med $f(0) = 9$ och $f(9) = 18$. Vi behöver därför endast kontrollera funktionens värden i eventuella lokala maxima och minima på intervallet för att hitta värdemängden. Derivatan

$$f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{81-x^2}}$$

har endast nollstället $x = 18/\sqrt{5}$ i intervallet och eftersom $f(18/\sqrt{5}) = 9\cdot\sqrt{5} > 9\cdot 2 = 18$, får vi att $9 < y \leq 9\sqrt{5}$.

7. Derivatan i 0 beräknas ur

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h - 0}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{2}{4}\cdot\frac{\sin^2\frac{h}{2}}{\frac{h^2}{4}} = \frac{1}{2},$$

där vi använt ett känt trigonometriskt samband. Att derivatan är kontinuerlig visas sedan genom att visa att $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$. Vi får

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x - (1-\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{2}{4}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f'(0).$$