

**Lösningsförslag Tentamen Envariabelanalys 2,
91MA21/91MA27/92MA21, 130607.**

1. Eftersom den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 1 = 0$, med dubbelrot $r = -1$, vet vi att den homogena lösningen blir $y_h = (Cx + D)e^{-x}$. För att hitta en partikulärlösning gör man lämpligen ansatsen $y_p = (Ax + B)e^{2x}$, och räkningar ger $A = 1/3$ och $B = -1/9$. Allmänna lösningen till ekvationen blir

$$y = y_h + y_p = (Cx + D)e^{-x} + \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{2x}.$$

Begynnelsevärdena ger därefter att $C = 0$ och $D = 1/9$, så vi får den sökta lösningen

$$y = \frac{e^{-x}}{9} + \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{2x}.$$

2. Enligt rörformeln blir volymen

$$\int_{\pi/2}^{\pi} 2\pi x(\sin x - (-\sin x)) dx = 4\pi \int_{\pi/2}^{\pi} x \sin x dx = 4\pi(\pi - 1).$$

3. (a) Med ML-utveckling ser vi att

$$\frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{1 - \cos 2x} = \frac{\sqrt{x} + \mathcal{O}(x)}{1 - (1 - \frac{4x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4))} = \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \frac{1 + \mathcal{O}(\sqrt{x})}{2 + \mathcal{O}(x^2)}.$$

och integralen är *divergent* eftersom $3/2 > 1$.

- (b) Termerna $2^{\ln k}$ går inte mot noll så serien är *divergent*.

- (c) Funktionen $f(k) = \frac{k+1}{k^3-1}$ avtar mot 0 då $k \rightarrow \infty$, vilket t.ex. ses genom att derivera f med avseende på ett reellt k . Enligt Leibniz kriterium är då den alternerande serien *konvergent*.

4. Vi delar med x och får ekvationen $y' + \frac{2}{x} \cdot y = \frac{1}{x^2(x+1)}$. Därefter multipliceras båda leden med den integrerande faktorn $e^{2 \ln x} = x^2$, och vi får ekvationen $(x^2 \cdot y)' = \frac{1}{x+1}$, med allmän lösning

$$y = \frac{1}{x^2}(\ln(x+1) + C).$$

Eftersom

$$x \cdot y = \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{C}{x} \rightarrow 1$$

då $x \rightarrow 0^+$ endast gäller för $C = 0$, får vi den sökta lösningen $y = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$.

5. Vi använder kända Maclaurinutvecklingar.

$$\frac{e^{x-x^2} - \cos 2x - \ln(1+x+2x^2)}{x^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 + x - x^2 + \frac{(x-x^2)^2}{2} + \frac{(x-x^2)^3}{3!} - (1 - \frac{4x^2}{2}) - (x + 2x^2 - \frac{(x+2x^2)^2}{2} + \frac{(x+2x^2)^3}{3}) + \mathcal{O}(x^4)}{x^3} \\
&= \frac{\frac{5x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)}{x^3} = \frac{5}{6} + \mathcal{O}(x) \rightarrow \frac{5}{6},
\end{aligned}$$

då $x \rightarrow 0$.

6. För konvergensradien använder vi kvotkriteriet. Gränsvärdet beräknas med hjälp av ett känt standardgränsvärde.

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{e^{1/(k+1)^2} - 1}{e^{1/k^2} - 1} = \frac{e^{1/(k+1)^2} - 1}{1/(k+1)^2} \cdot \frac{1/k^2}{e^{1/k^2} - 1} \cdot \frac{k^2}{(k+1)^2} \cdot |x| \rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot |x| = |x|,$$

då $k \rightarrow \infty$, vilket är < 1 då $|x| < 1$. För $x = 1$ kan serien efter ML-utveckling jämföras med $\sum 1/k^2$ och är därför konvergent, och för $x = -1$ ser vi att termerna avtar mot 0, t.ex. med hjälp av derivatan. Vi får alltså att serien är konvergent då $|x| \leq 1$.

7. Maclaurinutveckling ger oss att

$$S(x) = -\frac{x^3}{3!} - 2(1 + 4 \tan^2 \xi + 3 \tan^4 \xi) \cdot \frac{x^5}{5!},$$

för något ξ mellan 0 och x . Om nu $|x| < \frac{\pi}{4}$, är $|\tan \xi| < \tan \frac{\pi}{4} = 1$, så triangelolikheten ger oss att

$$|S(x) - (-\frac{x^3}{3!})| < 2(1 + 4 + 3) \cdot \frac{|x|^5}{5!} = \frac{2|x|^5}{15} < \frac{|x|^5}{3}.$$

Det följer att polynomet $-\frac{x^3}{3!}$ duger.