

**Lösningsförslag till Tentamen Envariabelanalys 1,
91MA21/91MA27/92MA21/92MA27, 130812.**

1. (a) Vi gör substitutionen $t^2 = x$ och därefter en partiell integration.

$$\int 2e^{\sqrt{x}} dx = \int 4te^t dt = 4te^t - \int 4e^t dt = 4e^t(t-1) + C = 4e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C.$$

- (b) Vi skriver om och gör sedan substitutionen $t = \cos x$.

$$\int \sin^3 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int (t^2 - 1) dt = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

- (c) Vi sätter $t = \ln x$ och integrerar sedan partiellt.

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan(\ln x)}{x} dx &= \int \arctan t dt = t \arctan t - \int \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= (\ln x) \arctan(\ln x) - \frac{1}{2} \ln(1 + (\ln x)^2) + C. \end{aligned}$$

2. (a) Vi förlänger för att få standardgränsvärden.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{3x^2} \cdot 3 \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3.$$

- (b) Vi faktorerar täljare och nämnare och förkortar sedan.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} = \frac{1+2+3}{1+1+1} = 2.$$

- (c) Vi förlänger för att utnyttja kända standardgränsvärden.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+x^2} - 1}{\arctan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+x^2} - 1}{x+x^2} \cdot \frac{2x}{\arctan 2x} \cdot \frac{1+x}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

3. Efter förenkling med ett trigonometriskt samband ser vi att funktionen inuti absolutbeloppet byter tecken vid $x = \pi/6$, så vi kan dela upp integralen där för att få bort absolutbeloppet från uttrycket.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} |1 - 4\sin^2 x| dx &= \int_0^{\pi/2} |1 - 2(1 - \cos 2x)| dx = \int_0^{\pi/2} |2\cos 2x - 1| dx \\ &= \int_0^{\pi/6} (2\cos 2x - 1) dx - \int_{\pi/6}^{\pi/2} (2\cos 2x - 1) dx = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

4. Funktionen $f(x)$ är inte definierad då $x = 2$, och höger- och vänstergränsvärden kring $x = 2$ visar att $f(x)$ har en lodrät asymptot där. Derivatan blir efter faktorisering

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2},$$

och en teckentabell visar ett lokalt maximum i $(1, 0)$ och ett lokalt minimum i $(3, 4)$. Eftersom $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$, och $f(x) - x \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \pm\infty$, har funktionen en sned asymptot $y = x$ då $x \rightarrow \pm\infty$.

5. Vi partialbråsuppdelar för att hitta en primitiv och använder därefter logaritmlagarna för att kunna räkna ut gränsvärdet.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{7}{(2+x)(3+x^2)} dx &= \int_1^\infty \left(\frac{1}{2+x} - \frac{x}{3+x^2} + \frac{2}{3+x^2} \right) dx \\ &= \left[\ln|2+x| - \frac{1}{2} \ln(3+x^2) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_1^\infty = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(2+x)^2}{3+x^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_1^\infty \\ &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \ln 2 - \ln 3. \end{aligned}$$

6. Obs att då $x = 0$ har den givna ekvationen ingen lösning för något val av a . Vi sätter $f(x) = x - \frac{2|x|}{x} + \frac{4}{x}$, för $x \neq 0$, ritar funktionens graf och räknar därefter antalet lösningar till $f(x) = a$ för olika a med hjälp av grafen. Då $x \neq 0$ blir $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$ (både då $x > 0$ och då $x < 0$), med nollställan i $x = \pm 2$. Teckentabell visar sedan att f har ett lokalt maximum i $(-2, -2)$ och ett lokalt minimum i $(2, 2)$. Vidare är $x = 0$ en lodrät asymptot och $f(x) \rightarrow \pm\infty$ då $x \rightarrow \pm\infty$. Vi ser till slut i grafen att $f(x) = a$ har
- två lösningar för $a < -2$ och $a > 2$,
 - en lösning för $a = \pm 2$, och
 - inga lösningar för $-2 < a < 2$.
7. (a) Se boken.
- (b) Sätt $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$, så att $f(0) = 0$ och

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = \frac{(1 - \cos x) \left(\frac{5}{4} - \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 \right)}{\cos^2 x},$$

vilken är ≥ 0 på intervallet. Funktionen f är således också ≥ 0 på intervallet, vilket skulle visas.