

**Svar till tentamen Envariabelanalys 2,
91MA21/91MA27/92MA21, 130823.**

1. Allmänna lösningen till ekvationen blir

$$y = -\frac{x}{3} - \frac{2}{9} + \frac{e^{2x}}{5} + Ce^x + De^{-3x},$$

och begynnelsevärdena ger därefter att den sökta lösningen blir

$$y = -\frac{x}{3} - \frac{2}{9} + \frac{e^{2x}}{5} + \frac{e^{-3x}}{45}.$$

2. Enligt skivformeln blir volymen

$$\int_0^{\pi/2} \pi(\sin x + 2 \cos x)^2 dx = \pi \left(\frac{5\pi}{4} + 2 \right).$$

3. Till exempel ML-utveckling ger gränsvärdet $1/2$.

4. (a) Eftersom

$$\frac{\sqrt{k-1}}{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{1}{k}}}{1+\frac{1}{k}},$$

är serien *divergent* enligt jämförelsekriteriet.

- (b) ML-utveckling ger

$$\left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

så serien är *konvergent* enligt jämförelsekriteriet.

- (c) Funktionen $f(k) = 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{k}}$ avtar mot 0 då $k \rightarrow \infty$, vilket t.ex. ses genom att derivera f med avseende på ett reellt k . Enligt Leibniz kriterium är då den alternerande serien *konvergent*.

5. Konvergens då $|x| < \frac{3}{2}$. Ingen konvergens då $x = \pm \frac{3}{2}$ eftersom termerna inte går mot noll i de fallen.

6. Differentialekvationen är separabel med lösningarna givna av funktionen $y = 1$, eller funktionerna $y = e^{Dx}$, för $D \neq 0$.

7. Med derivering får man $p(x) = x$, och sedan att, för $0 \leq \xi \leq x \leq \pi/4$,

$$\begin{aligned} |\tan x - x| &= \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} x^3 \right| = |2(1 + \tan^2 \xi) + 6 \tan^2 \xi(1 + \tan^2 \xi)| \frac{x^3}{3!} \\ &\leq |2(1 + 1) + 6(1 + 1)| \frac{x^3}{3!} = \frac{16x^3}{3!} \leq 3x^3. \end{aligned}$$