LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jesper Thorén

**Lösningsförslag till Tentamen 140422,
Envariabelanalys 1,
för 91MA21/91MA27/92MA21/92MA27.**

1. (a) Vi gör substitutionen $t^2 = x+1$, så att $2tdt = dx$, och därefter en partiell integration.

$$\int \cos\sqrt{x+1}\; dx = \int 2t\cos t\; dt = 2t\sin t - \int 2\sin t\; dt = 2t\sin t + 2\cos t + C$$
$$= 2\sqrt{x+1}\sin\sqrt{x+1} + 2\cos\sqrt{x+1} + C.$$

(b) Vi gör substitutionen $t = \arctan x$, så att $dt = \dfrac{dx}{1+x^2}$.

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\; dx = \int e^t\; dt = e^t + C = e^{\arctan x} + C.$$

(c) Vi faktoriserar nämnaren och gör en partialbråksuppdelning.

$$\int \frac{5}{x(x^2-4x+5)}\; dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x+4}{x^2-4x+5}\right)\; dt.$$

Därefter kvadratkompletteras den andra termens nämnare och substitutionen $t = x-2$ gör sedan att vi kan hitta primitiven.

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{-(x-2)+2}{(x-2)^2+1}\right)\; dt = \ln|x| - \int \frac{t}{t^2+1}\; dt + \int \frac{2}{t^2+1}\; dt$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + 2\arctan t + C = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) + 2\arctan(x-2) + C.$$

2. (a) Vi förlänger för att få standardgränsvärden.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)}{-2x}\cdot(-2x)\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\frac{1}{4x} = 1\cdot(-2)\cdot 1\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

(b) Vi faktoriserar täljare och nämnare och förkortar sedan.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-4}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x+2}{x+1} = \frac{4+2+2}{2+1} = \frac{8}{3}.$$

(c) Vi förlänger för att utnyttja kända standardgränsvärden.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^{2x}-1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^{2x}-1)}{e^{2x}-1}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2 = 1\cdot 1\cdot 2 = 2.$$

3. Vi observerar först att funktionen är definierad för alla reella tal x. Derivatan blir

$$f'(x) = (2x + x^2 - 3)e^x = (x+3)(x-1)e^x,$$

och en teckentabell visar att f har ett lokalt maximum då $x = -3$, med $f(-3) = 6e^{-3}$, och ett lokalt minimum då $x = 1$, med $f(1) = -2e$. Vidare gäller att $f(x) \to \infty$, och $\dfrac{f(x)}{x} \to \infty$, då $x \to \infty$, eftersom e^x är dominant i funktionen, så ingen sned asymptot finns då $x \to \infty$. Däremot gäller att $f(x) \to 0$ då $x \to -\infty$ (ty e^x dominant även här), så en vågrät asymptot $y = 0$ finns då $x \to -\infty$.

4. (a) f är kontinuerlig i a om $f(x) \to f(a)$, då $x \to a$.

   (b) f är deriverbar i a om gränsvärdet

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

   existerar (ändligt).

   (c) Funktionen är definierad för alla reella $x \neq 0$, och har där derivatan

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

   Det följer att funktionen är konstant då $x > 0$ och då $x < 0$, och

$$f(x) = f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \qquad x > 0,$$

$$f(x) = f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}, \qquad x < 0.$$

   Värdemängden för f är alltså $\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$.

5. Vi beräknar först en primitiv funktion genom att först använda logaritmlagarna och sedan integrera partiellt ($x > 0$).

$$\int \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\, dx = \int \ln \frac{x+1}{x}\, dx = \int (\ln(x+1) - \ln x)\, dx$$

$$= (x+1)\ln(x+1) - x - x\ln x + x + C = (x+1)\ln(x+1) - x\ln x + C.$$

   Vi får nu att

$$\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\, dx = \lim_{c \to 0^+} \left[(x+1)\ln(x+1) - x\ln x\right]_c^1$$

$$= \lim_{c \to 0^+} (2\ln 2 - 0 - (c+1)\ln(c+1) + c\ln c) = 2\ln 2,$$

   enligt standardgränsvärdena ($c \ln c \to 0$ då $c \to 0^+$). Så den första generaliserade integralen är *konvergent* med värdet $2\ln 2$. Den andra generaliserade integralen blir, efter att vi använt logaritmlagarna igen,

$$\int_1^\infty \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\, dx = \lim_{b \to \infty} \left[(x+1)\ln(x+1) - x\ln x\right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[x \ln \frac{x+1}{x} + \ln(x+1)\right]_1^b = \lim_{b \to \infty} \left(b \ln \frac{b+1}{b} + \ln(b+1) - 2\ln 2 + 0\right) = \infty,$$

   eftersom

$$b \ln \frac{b+1}{b} = b \ln\left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{\ln(1 + 1/b)}{1/b} \to 1,$$

   då $b \to \infty$ (standardgränsvärde), och $\ln(b+1) \to \infty$. Alltså är den andra generaliserade integralen *divergent*.

6. Vi observerar först att funktionen är definierad och kontinuerlig för alla reella tal x. Speciellt är $f(\pm 1) = 0$, och $f(x) > 0$ för $x \neq \pm 1$.

(a) Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x^2-1)^{1/3}} \cdot 2x = \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{(x^2-1)^{1/3}},$$

då $x \neq \pm 1$, och måste kolla om derivatan existerar i $x = \pm 1$. Men, till exempel

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2-1)^{2/3}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^{2/3}(x+1)^{2/3}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)^{2/3}}{(x-1)^{1/3}} = \infty,$$

och analogt för de andra fallen, visar att derivatan inte existerar då $x = \pm 1$. Vi får sedan efter ytterligare en derivation och förenkling, att

$$f''(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{(x^2-1)^{1/3} - x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{(x^2-1)^{2/3}}}{(x^2-1)^{2/3}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{x^2-3}{(x^2-1)^{4/3}},$$

då $x \neq \pm 1$.

(b) Ett teckenstudium av förstaderivatan visar att f har lokalt maximum i $x = 0$, med $f(0) = 1$, och lokala minima i $x = \pm 1$, då $f(\pm 1) = 0$.

(c) Ett teckenstudium av andraderivatan visar att f är konvex då $x < -\sqrt{3}$ och då $x > \sqrt{3}$, och konkav då $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

7. Vi måste dela upp i flera fall.

Fall 1: $n = 0$, $m = 0$. Den primitiva funktionen blir

$$\int dx = x + C.$$

Fall 2: $n = 0$, $m \neq 0$. Vi får

$$\int \cos mx \, dx = \frac{\sin mx}{m} + C.$$

Fall 3: $n \neq 0$, $m = 0$. Som ovan får vi

$$\int \cos nx \, dx = \frac{\sin nx}{n} + C.$$

Fall 4: $n = m \neq 0$. Vi använder ett känt trigonometriskt samband och får

$$\int \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2nx) \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n} + C.$$

Fall 5: $n \neq 0$, $m \neq 0$, $n \neq m$. Om vi betecknar den sökta primitiven med I, och sedan partialintegrerar två gånger, får vi ett samband som kan användas för att beräkna I.

$$I = \int \cos nx \cos mx \, dx = \frac{\sin nx}{n} \cdot \cos mx + \int \frac{\sin nx}{n} \cdot m \sin mx \, dx$$
$$= \frac{\sin nx}{n} \cdot \cos mx - \frac{\cos nx}{n^2} \cdot m \sin mx + \int \frac{\cos nx}{n^2} \cdot m^2 \cos mx \, dx.$$

Den sista termen i detta uttryck är $\frac{m^2}{n^2} \cdot I$, så vi ser att

$$I = \frac{\sin nx}{n} \cdot \cos mx - \frac{\cos nx}{n^2} \cdot m \sin mx + \frac{m^2}{n^2} \cdot I,$$

dvs,

$$I - \frac{m^2}{n^2} \cdot I = \frac{n^2 - m^2}{n^2} \cdot I = \frac{\sin nx}{n} \cdot \cos mx - \frac{\cos nx}{n^2} \cdot m \sin mx,$$

vilket, efter förenkling, slutligen ger att

$$I = \int \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{n^2 - m^2} \left(n \sin nx \cos mx - m \cos nx \sin mx \right).$$