LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jesper Thorén

Svar till tentamen Envariabelanalys 2, 91MA21/91MA27/92MA21, 140605.

1. Den karakteristiska ekvationen $r^2+4r+3=0$, har rötterna $r=-3$ och $r=-1$, så lösningen till den homogena differentialekvationen blir $y_h = Ce^{-3x}+De^{-x}$, för reella konstanter C och D. För att hitta en partikulärlösning till differentialekvationen gör vi lämpligen ansatsen $y = (Ax+B)e^{-2x}$, vilket ger $y_p = (-4x+2)e^{-2x}$. Så allmänna lösningen till differentialekvationen blir $y = y_p + y_h = (-4x+2)e^{-2x} + Ce^{-3x} + De^{-x}$. De givna begynnelsevärdena är till slut uppfyllda då $C=-4$ och $D=4$, vilket ger oss den sökta lösningen
$$y = (-4x+2)e^{-2x} - 4e^{-3x} + 4e^{-x}.$$

2. För varje x sådant att $0 \le x \le 1$, roterar vi en smal rektangel mellan kurvorna runt linjen $x=1$ för att bilda ett rör med radie $1-x$. Volymen ges sedan av rörformeln:
$$\int_0^1 2\pi(1-x)(e^{x/2}-(1-x^2))\,dx = 2\pi\left[2e^{x/2} - x + \frac{x^3}{3} - 2xe^{x/2} + 4e^{x/2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$
$$= 2\pi\left(4e^{1/2} - \frac{77}{12}\right).$$

3. (a) Eftersom
$$\frac{1}{2k+7\sqrt{k}} = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2+\frac{7}{\sqrt{k}}},$$
är serien *divergent* enligt jämförelsekriteriet.

   (b) Termerna är positiva och eftersom
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{k}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1,$$
då $k\to\infty$, är serien *konvergent* enligt kvotkriteriet.

   (c) Serien är alternerande och
$$a_k = \ln(k^3+3) - 3\ln k = \ln\left(1+\frac{3}{k^3}\right) \to \ln 1 = 0,$$
då $k\to\infty$. Funktionen $f(x) = \ln(x^3+3) - 3\ln x$ har derivatan $f'(x) = \dfrac{-9}{x(x^3+3)}$, så att $f'(x) < 0$, då $x > 1$, och eftersom $a_k = f(k)$ är följden därför avtagande. Så serien är *konvergent* enligt Leibniz' kriterium.

4. Vi multiplicerar båda leden med den integrerande faktorn $\dfrac{1}{x}$, och får efter en partialbråksuppdelning att
$$\frac{y}{x} = \int \frac{2}{x(x^2-1)}\,dx = \int\left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)dx,$$
så att
$$y = x(-2\ln x + \ln(x+1) + \ln(x-1) + C).$$
Begynnelsevärdet ger sedan att den sökta lösningen blir
$$y = x(-2\ln x + \ln(x+1) + \ln(x-1) - \ln\frac{3}{4}).$$

5. (a) Genom att använda den kända ML-utvecklingen $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \mathcal{O}(t^5)$, för t nära 0, får vi, med $t = 2x^2$, att

$$f(x) = 2x^2 - \frac{(2x^2)^3}{3!} + \mathcal{O}((2x^2)^5) - x = -x + 2x^2 - \frac{8x^6}{6} + \mathcal{O}(x^{10}),$$

så det sökta polynomet är $-x + 2x^2 - \frac{4x^6}{3}$.

(b) En ML-utveckling ger

$$\frac{1 + a\sin x - \sqrt{1+x}}{e^{3x} - 1 - 3x} = \frac{1 + a(x + \mathcal{O}(x^3)) - \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)\right)}{1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) - 1 - 3x}$$

$$= \frac{\left(a - \frac{1}{2}\right)x + \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)}{\frac{9x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)},$$

vilket har ett ändligt gränsvärde då $x \to 0$ endast då $a = 1/2$, och gränsvärdet blir för detta a lika med $1/36$.

6. Vi utnyttjar att

$$\left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right)^2 = \frac{1}{4k^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right),$$

då k är stort. För att hitta konvergensradien använder vi kvotkriteriet och får att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{1}{4(k+1)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(k+1)^3}\right)}{\frac{1}{4k^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)} \cdot |x| \to |x|,$$

då $k \to \infty$. Serien är alltså konvergent då $|x| < 1$. För $x = 1$, skriver vi

$$\left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 = \frac{1}{k^2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

och vi ser att serien är konvergent enligt jämförelsekriteriet $(2 > 1)$. Med $x = -1$ får vi en alternerande serie där beloppet av termerna avtar mot 0 (negativ derivata). Enligt Leibniz är serien konvergent även här. Potensserien är alltså konvergent då $-1 \le x \le 1$.

7. För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $y = (Ax + B)e^{x^2}$, som insatt i differentialekvationen ger $A = 2$ och $B = 1$. Den homogena lösningen blir $y = (Cx + D)e^x$, och de givna begynnelsevärdena ger slutligen den sökta lösningen

$$y = (2x+1)e^x + (2x+1)e^{x^2} = (2x+1)(e^x + e^{x^2}).$$