LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jesper Thorén

Lösningsförslag till Tentamen 140612,
Envariabelanalys 1,
för 91MA21/91MA27/92MA21/92MA27.

1. (a) Vi förlänger för att få standardgränsvärden.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\ln(1+4x)} \cdot \frac{3x}{4x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

(b) Vi använder potenslagarna för att skriva om uttrycket.

$$\lim_{x\to \infty} (2^{1-x})^{1/x} = \lim_{x\to\infty} 2^{1/x} \cdot 2^{-1} = 2^0 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

(c) Vi förlänger för att utnyttja kända standardgränsvärden.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+3^{-x})}{\ln(1+4^{-x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+3^{-x})}{3^{-x}} \cdot \frac{4^{-x}}{\ln(1+4^{-x})} \cdot \frac{3^{-x}}{4^{-x}} = 1 \cdot 1 \cdot \infty = \infty.$$

2. (a) Efter en nödvändig polynomdivision gör vi en partialbråksuppdelning.

$$\int \frac{x^2}{x^2-4}\, dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2-4}\right)\, dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)\, dx$$

$$= x + \ln|x-2| - \ln|x+2| + C.$$

(b) Vi gör substitutionen $t = x^2 - 4$, så att $dt = 2x\; dx$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\, dx = \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2-4} + C.$$

(c) Vi integrerar partiellt två gånger.

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{x^2}{2}e^{2x} - \int x e^{2x}\, dt = \frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \int \frac{e^{2x}}{2}\, dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + C.$$

3. Vi observerar först att funktionen är definierad för alla reella tal förutom $x = \pm 2$. Derivatan blir

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x^2-4) - 2x(x-1)^2}{(x^2-4)^2} = \frac{2(x-4)(x-1)}{(x^2-4)^2},$$

och en teckentabell visar att f har ett lokalt maximum då $x = 1$, med $f(1) = 0$, och ett lokalt minimum då $x = 4$, med $f(4) = 3/4$. Vidare gäller att $f(x) \to 1$, då $x \to \pm\infty$, så grafen har en vågrät asymptot $y = 1$ då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$. Slutligen ser vi genom att beräkna de fyra olika gränsvärdena då $x \to \pm 2^{\pm}$, att grafen har lodräta asymptoter $x = -2$ och $x = 2$.

4. Först gör vi substitutionen $t = \sin x$, så att $dt = \cos x \; dx$, och integrationsgränserna ändras till 0 resp. 1. Efter substitutionen görs en partialbråksuppdelning och en primitiv beräknas.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{7\cos x}{(2+\sin x)(4-\cos^2 x)} \; dx = \int_0^1 \frac{7}{(2+t)(4-(1-t^2))} \; dt = \int_0^1 \left(\frac{-t+2}{t^2+3} + \frac{1}{t+2} \right) \; dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \ln(t^2+3) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + \ln(t+2) \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2} \ln 3 - 2\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5. (a) Substitutionen $t = \sqrt{x}$, låter oss beräkna en primitiv.

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \; dx = \int_1^\infty \frac{2}{(1+t)^2} \; dt = \left[-\frac{2}{1+t} \right]_1^\infty = 1.$$

(b) Vi sätter $t = \ln x$, och beräknar den generaliserade integralen.

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2} \; dx = \int_1^\infty \frac{1}{t^2} \; dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^\infty = 1.$$

(c) Med $t = e^x$ hittar vi en primitiv och kan därefter beräkna gränsvärdet.

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}} \; dx = \int_1^\infty \frac{1}{1+t^2} \; dt = [\arctan t]_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

6. (a) Se boken.

(b) Vi integrerar partiellt två gånger och upptäcker att integralen vi startade med återkommer. Vi får alltså att

$$\int (\sin 2x)(\sin 4x) \; dx = -\frac{\cos 2x}{2} \cdot \sin 4x + (\sin 2x)(\cos 4x) + 4 \int (\sin 2x)(\sin 4x) \; dx,$$

och om vi löser ut integralen får vi

$$\int (\sin 2x)(\sin 4x) \; dx = \frac{1}{3} \left(\frac{\cos 2x}{2} \cdot \sin 4x - (\sin 2x)(\cos 4x) \right) + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

7. (a) Vi ritar grafen till den kontinuerliga funktionen $f(x) = x^{1/x} = e^{(\ln x)/x}$, då $x > 0$, och ser att $f(x) \to 0$ då $x \to 0^+$, och $f(x) \to e^0 = 1$ då $x \to \infty$. Vidare har f ett lokalt maximum då $x = e$, med $f(e) = e^{1/e} > 1$. Det följer att f antar alla värden mellan 0 och $e^{1/e}$, dvs, $V_f =]0, e^{1/e}]$.

(b) Ekvationen kan skrivas $a^{1/a} = x^{1/x}$, så grafen för f i (a) ger *en lösning* då $0 < a \le 1$ eller $a = e$, och *två lösningar* då $1 < a < e$ eller $a > e$.