

**Lösningsförslag till Tentamen 140815,
Envariabelanalys 1,
för 91MA21/91MA27/92MA21/92MA27.**

1. (a) Vi faktorerar nämnaren och gör en partialbråksuppdelning.

$$\int \frac{2x-1}{x^3+x} dx = \int \left(\frac{x+2}{x^2+1} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctan x - \ln|x| + C.$$

- (b) Vi integrerar partiellt två gånger.

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin 2x dx &= -x^2 \cdot \frac{\cos 2x}{2} + x \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} dx \\ &= -\frac{x^2}{2} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

- (c) Variabelbytet $t = x^2$ ger en integrand vi känner igen.

$$\int \frac{x}{x^4+1} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \arctan t + C = \frac{1}{2} \arctan x^2 + C.$$

2. (a) Vi förlänger för att få kända standardgränsvärden.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\ln(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{4x} \cdot \frac{2x}{\ln(1+2x)} \cdot \frac{4}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{4}{2} = 2.$$

- (b) Eftersom $4^{x+1} = 2^{2(x+1)} = 2^{2x} \cdot 2^2$, kan vi förkorta med den dominerande termen 2^x i både täljare och nämnare.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{10} - \ln(x^8) + 2^x}{\sqrt{4^{x+1} - x^9}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{10}2^{-x} - 2^{-x} \ln(x^8) + 1}{\sqrt{2^2 - x^9 2^{-2x}}} = \frac{1}{2}.$$

- (c) Vi gör variabelbytet $t = x - 1$, och får ett känt standardgränsvärde.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

3. Vi observerar först att funktionen är definierad för alla reella tal förutom $x = \pm\sqrt{2}$. Derivatan blir

$$f'(x) = \frac{x^2(x-2)e^x}{(x^2-2)^2},$$

och en teckentabell visar att f har en terrasspunkt då $x = 0$ och ett lokalt minimum då $x = 2$, med $f(2) = e^2/2$. Vidare gäller att $f(x) \rightarrow \infty$, då $x \rightarrow \infty$, och $f(x) \rightarrow 0$, då $x \rightarrow -\infty$ så grafen har en vågrät asymptot $y = 0$ då $x \rightarrow -\infty$. Eftersom $f(x)/x \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$ finns ingen sned asymptot då $x \rightarrow \infty$. Slutligen ser vi genom att beräkna de fyra olika gränsvärdena då $x \rightarrow \pm\sqrt{2}^\pm$, att grafen har lodräta asymptoter $x = -\sqrt{2}$ och $x = \sqrt{2}$.

4. Vi faktorerar nämnaren och gör en partialbråksuppdelning för att kunna beräkna den generaliserade integralen.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{x+1}{x^4+4x^2} dx &= \frac{1}{4} \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{x+1}{x^2+4} \right) dx = \frac{1}{4} \left[\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln(x^2+4) - \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \right]_1^\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\ln \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ln 5 + \frac{1}{8} \arctan \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ln 5 - \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} \arctan \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5. Vi delar upp i två fall. Då $x \geq -1$ blir uttrycket för f lika med

$$f(x) = \frac{x^2+5}{x} = x + \frac{5}{x},$$

vilket direkt visar att f har den sneda asymptoten $y = x$ då $x \rightarrow \infty$, eftersom $f(x) - x = \frac{5}{x} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$. Alternativt kollar man $f(x)/x$ då $x \rightarrow \infty$ som nedan. Vidare ger gränsvärdena då $x \rightarrow 0^\pm$ att f har en lodrät asymptot där.

För fallet $x \leq -1$ får vi att

$$f(x) = \frac{x^2+5}{-x-1-1} = -\frac{x^2+5}{x+2},$$

så att f ej är definierad för $x = -2$. Gränsvärdena då $x \rightarrow -2^\pm$ visar att f har en lodrät asymptot där. För eventuell sned asymptot beräknar vi

$$\frac{f(x)}{x} = -\frac{x^2+5}{x^2+2x} \rightarrow -1 = k,$$

då $x \rightarrow -\infty$, och

$$f(x) - kx = f(x) + x = \frac{2x-5}{x+2} \rightarrow 2 = m,$$

då $x \rightarrow -\infty$. Så f har den sneda asymptoten $y = -x + 2$ då $x \rightarrow -\infty$. Sammanfattningsvis har f lodräta asymptoter $x = 0$ och $x = -2$, samt de sneda asymptoterna $y = x$ då $x \rightarrow \infty$ och $y = -x + 2$ då $x \rightarrow -\infty$.

6. Se boken.

7. Vi löser problemet genom att rita grafen för funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 2|x| + 4}{x},$$

för $x > 0$ och för $x < 0$, och ser sedan efter hur många lösningar ekvationen $f(x) = k$ har för olika k . För $x > 0$ ser man att f har ett lokalt minimum då $x = 2$, med $f(2) = 2$, och att $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0^+$ och då $x \rightarrow \infty$. För $x < 0$ får vi ett lokalt maximum då $x = -2$ med $f(-2) = -2$ och $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 0^-$ och då $x \rightarrow -\infty$. Ritas grafen ser man nu att ekvationen har två lösningar då $k > 2$ eller $k < -2$, en lösning då $k = 2$ eller $k = -2$, och inga lösningar då $-2 < k < 2$.