

**Svar till tentamen Envariabelanalys 2,
91MA21/91MA27, 150109.**

1. För varje x sådant att $1 \leq x \leq 2$, roterar vi en smal rektangel mellan kurvan och x -axeln runt x -axeln för att bilda en kropp. Volymen beräknas sedan med hjälp av skivformeln.

$$\int_1^2 \pi \cdot \frac{1}{x^2(x+2)} dx = \pi \int_1^2 \left(\frac{1/2}{x^2} - \frac{1/4}{x} + \frac{1/4}{x+2} \right) dx = \frac{\pi}{4} \left(1 + \ln \frac{4}{3} \right).$$

2. Lösningen till den homogena differentialekvationen blir $y = C \sin x + D \cos x$, på grund av att den har de komplexa rötterna $\pm i$, och en partikulärlösning fås efter lämplig ansats till att bli $y = \frac{x}{2} e^x$. Lösningen som uppfyller begynnelsevärdena fås sedan till $y = \frac{x}{2} e^x - \frac{1}{2} \sin x$.
3. (a) *Konvergent* enligt jämförelse med $1/\sqrt{x}$.
(b) En Maclaurinutveckling av täljare och nämnare visar att integralen är *divergent* enligt jämförelse med $1/x$.
(c) Eftersom

$$\frac{\ln(x+2) - \ln x}{x^2} = \frac{\ln(1 + \frac{2}{x})}{x^2} = \frac{2}{x^3} \cdot \frac{\ln(1 + \frac{2}{x})}{\frac{2}{x}},$$

ser vi att integralen är *konvergent* enligt jämförelse med $1/x^3$.

4. En Maclaurinutveckling visar att $f(x) \rightarrow \frac{5}{6}$ då $x \rightarrow 0$, så vi definierar $f(0) = \frac{5}{6}$.
5. Allmänna lösningen till differentialekvationen blir (lämpligt omskriven)

$$y = e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 2) + 2 \cdot \frac{e^{\sqrt{x}} + \frac{C}{2}}{\sqrt{x}},$$

och väljer vi $C = -2$, så kommer $y \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$. Den sökta lösningen blir alltså

$$y = e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 2) + 2 \cdot \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}}.$$

6. (a) Potensserien är konvergent då $-1/3 \leq x \leq 1/3$. (b) Seriens värde är $\ln 3/2$.
7. $y = \frac{e^{x^2/2} - e^{-x^2/2}}{2}$, då $x \geq 0$, och $y = \frac{x^2 e^{x^2/2}}{2}$, då $x \leq 0$. Man kontrollerar sedan att $y'(0)$ blir samma från både höger och vänster.