

**Lösningsförslag till Tentamen 150422,
Envariabelanalys 1,
för 91MA21/91MA27/92MA21/92MA27.**

1. (a) Vi faktorerar och förkortar innan vi beräknar gränsvärdet.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+6)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+6}{x} = \frac{1+6}{1} = 7.$$

- (b) Vi förlänger för att kunna utnyttja ett känt standardgränsvärde.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-2x} - 1}{x^2 - 2x} \cdot \frac{x^2 - 2x}{x} = 1 \cdot (-2) = -2.$$

- (c) Vi delar upp bråket och förlänger.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 4x - \sin 2x}{\ln(1+3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{\ln(1+3x)} \cdot \left(4 \cdot \frac{\arctan 4x}{4x} - 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (4 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2. (a) Vi sätter $x = t^2$, så att $dx = 2t dt$, och integrerar partiellt.

$$\int \sin \sqrt{x} \, dx = \int 2t \sin t \, dt = -2t \cos t + \int 2 \cos t \, dt = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C.$$

- (b) Vi gör en partialbråksuppdelning.

$$\int \frac{x+3}{x^2-x-6} \, dx = \frac{1}{5} \int \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{6}{x-3} \right) \, dx = \frac{1}{5} (-\ln|x+2| + 6 \ln|x-3|) + C.$$

- (c) Partiell integration och sedan polynomdivision i den nya integralen ger oss

$$\int \ln(1+x^2) \, dx = x \ln(1+x^2) - \int x \cdot \frac{2x}{1+x^2} \, dx = x \ln(1+x^2) - 2(x - \arctan x) + C.$$

3. Funktionen är definierad och kontinuerlig för alla reella tal. Derivatans blir, efter förenkling

$$f'(x) = -4(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2+2x},$$

så att $f'(x) = 0$ om och endast om $x = 2$ eller $x = 1/2$. En teckentabell visar sedan att f har ett lokalt maximum då $x = 2$ och ett lokalt minimum då $x = 1/2$. Vidare gäller att $f(x) \rightarrow 0$, då $x \rightarrow \pm\infty$, så grafen har en vågrät asymptot $y = 0$ då $x \rightarrow \pm\infty$.

4. Vi faktorerar nämnaren och gör en partialbråksuppdelning.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{4x^2}{(x+1)(x^2+3)} \, dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3x}{x^2+3} - \frac{3}{x^2+3} \right) \, dx \\ &= \left[\ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln(x^2+3) - \sqrt{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = 4 \ln 2 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

5. Vi ritar grafen till funktionen $f(x) = 3x^2 - 4x - 2\ln|x|$, och ser att värdemängden blir $[-1, \infty]$, så ekvationen $f(x) = a$ har ingen lösning då $a < -1$.
6. En partiell integration och sedan en partialbråksuppdelning gör att vi kan hitta primitiven och sedan beräkna gränsvärdet.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^4} dx &= \left[-\frac{1}{3x^3} \cdot \ln(1+x^2) \right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{1}{3x^3} \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\ln 2}{3} + \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{x} - \arctan x \right]_1^\infty = \frac{\ln 2}{3} + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).\end{aligned}$$

7. (a) Se boken.
- (b) Med hjälp av definitionen av derivata får man att $f'(0) = 2$, och att $f''(0)$ inte existerar.