

Tentamen Envariabelanalys 2, 120608, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. 8 poäng med minst tre uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Godkänd. 16 poäng med minst fem uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Väl Godkänd. Alla lösningar ska vara fullständiga och välmotiverade.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' = 2y + \frac{x^2}{x+1}$, $x > 0$, som uppfyller begynnelsevillkoret $y(1) = 0$.
2. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området som begränsas av kurvan $y = e^{2x}$, y -axeln och linjen $y = e$, roteras ett varv kring x -axeln.
3. Undersök vilka av följande som är konvergenta.

$$(a) \int_2^\infty \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} dx, \quad (b) \sum_{k=2}^\infty (-1)^k \frac{k^2 + 1}{k^3 - 1}, \quad (c) \sum_{k=1}^\infty \frac{2^k}{\sqrt{k!}}.$$

4. Lös differentialekvationen $y'' - 2y - 3y = xe^x$, och ange alla lösningar sådana att $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$.
5. Bestäm konstanten a så att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax} - 1}{x^2} + \frac{\sqrt{1-x}}{\ln(1+x)} \right),$$

existerar ändligt och bestäm det då.

6. Bestäm samtliga lösningar till differentialekvationen $y'' + 4y = 2 \cos^2 x$.
7. För vilka reella tal x är potensserien

$$\sum_{k=1}^\infty \left(1 - k \sin \frac{1}{k} \right) x^k$$

konvergent?