

Tentamen Envariabelanalys 1, 120815, kl 14-19.

Inga hjälpmedel tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. 8 poäng med minst tre uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Godkänd. 16 poäng med minst fem uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Väl Godkänd. Alla lösningar ska vara fullständiga och välmotiverade.

1. Beräkna följande gränsvärden.

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x} \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2+x)}{\ln x} \quad (c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{3x}$$

2. Bestäm följande primitiva funktioner.

$$(a) \quad \int \ln(1+\sqrt{x}) \, dx, \quad (b) \quad \int \frac{2x+1}{x^2+x} \, dx, \quad (c) \quad \int x \sin^2 x \, dx$$

3. Undersök om kurvan

$$y = \frac{x}{x-1} e^{1/x},$$

har några asymptoter (lodräta, vågräta eller sneda), och ange dem isåfall.

4. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2} - \ln(1+x^2).$$

Ange alla lokala maxima och minima samt lodräta och vågräta asymptoter om de finns.

5. Beräkna värdet av den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{1+x}{x(1+x^2)} \, dx.$$

6. För vilka värden på den reella konstanten a saknar ekvationen $3x^2 - 4x - 2 \ln|x| = a$ reella lösningar?

7. (a) Använd definitionen av derivata för att bestämma derivatan av funktionen (1p)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

- (b) Visa att funktionen $f(x) = 1 + x + x^3 + x^5$ har en invers funktion f^{-1} . Räkna ut $f^{-1}(4)$ och derivatan $Df^{-1}(4)$. (2p)