

Tentamen Envariabelanalys 2, 120825, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. 8 poäng med minst tre uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Godkänd. 16 poäng med minst fem uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Väl Godkänd. Alla lösningar ska vara fullständiga och välmotiverade.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $(1 - x^2)y' + 2xy = x$, $|x| < 1$, som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 3$.
2. Beräkna volymen av den rotations kropp som uppkommer då området mellan kurvan $y = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 3}}$, $0 \leq x \leq 3$, x -axeln och linjen $x = 3$, roteras ett varv kring x -axeln.
3. Ange den lösning till differentialekvationen $y'' - 2y' - 3y = 6xe^x$, som uppfyller villkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 1$.
4. Avgör om följande är konvergenta.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 + k}}{k^2 + k + 1}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{k^2 + 2} - \sqrt{k^2 + 1}), \quad (c) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x^2 - 1} dx.$$

5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{\ln(1 + x + x^2)} - \frac{\cos x}{\arctan x} \right).$$

6. För vilka reella tal x är potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k + 1}{k^3 + 1} x^k$$

konvergent?

7. Låt $f(x) = \ln(1 - x^2)$.

(a) Ange Maclaurinpolynomet $p_4(x)$ av grad 4 för $f(x)$. (1p)

(b) Uppskatta felet man gör om man ersätter $f(x)$ med $p_4(x)$ då $|x| < \frac{1}{4}$, genom att använda Lagranges form på resttermen. (2p)