

Tentamen Envariabelanalys 2, 130107, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. 8 poäng med minst tre uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Godkänd. 16 poäng med minst fem uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Väl Godkänd. Alla lösningar ska vara fullständiga och välmotiverade.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $(1+x^2)y' = xy$, som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 2$.
2. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området mellan kurvan $y = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$, $1 \leq x \leq 2$ och x -axeln roteras ett varv kring x -axeln.
3. Ange den lösning till differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = 2xe^{-x}$, som uppfyller villkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 2$.
4. Avgör om följande serier är konvergenta.

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k^3}{\sqrt{k^4 + k^6}}, \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k-1}}{k+1}.$$

5. För vilka reella tal x är potensserien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k + 1}{k^4 + 1} x^k$$

konvergent?

6. Beräkna konstanten a så att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x-x^2}}{1 - \cos x} - \frac{2\sqrt{1+ax}}{x^2} \right)$$

existerar ändligt och bestäm gränsvärdet för detta a .

7. Visa med Maclaurinutveckling att olikheten

$$|\sqrt{1+2x} - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2},$$

gäller för alla $x \geq 0$.