

Tentamen Envariabelanalys 1, 130111, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. 8 poäng med minst tre uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Godkänd. 16 poäng med minst fem uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Väl Godkänd. Alla lösningar ska vara fullständiga och välmotiverade.

1. Beräkna följande gränsvärden.

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + e^x}{3e^x - \sin 2x} \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{\sin 3x} \quad (c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$$

2. Bestäm följande primitiva funktioner.

$$(a) \quad \int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx, \quad (b) \quad \int \arctan \sqrt{x+1} dx, \quad (c) \quad \int \ln(x^2 + 1) dx$$

3. Ange antalet reella rötter till ekvationen

$$2 \arctan x + \ln(1 + x^2) = 0.$$

4. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 3}{x^2 - 3}.$$

Ange alla lokala maxima och minima samt asymptoter om de finns.

5. Beräkna värdet av den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{x-2}{x^3 + 3x^2 + 2x} dx.$$

6. (a) Formulera analysens huvudsats. (1p)
(b) Visa att

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t^{10} + 1} dt$$

är en avtagande funktion då $x \geq 1$. (2p)

7. Antag att tangenten i punkten P på kurvan $y = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$ skär x -axeln i punkten Q .
Var ska P väljas om sträckan mellan P och Q ska bli så kort som möjligt?